1933 № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

VII СЕРИЯ

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

VII SÉRIE

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES



ЛЕНИНГРАД — LENINGRAD
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ПРИМЕР СТАНДАРТНОЙ ЦИТАТЫ • EXEMPLE DE CITATION

Н. П. Неронов. Об одном методе нахождения фигур относительного равновесия однородной вращающейся массы, соседних с эллипсоидальными. ИМЕН, 1933, № 2, стр. 215.

N. Neronov. Sur une méthode de détermination des figures d'équilibre relatif d'une masse liquide homogène en rotation voisines des ellipsoïdes. BAS-MN, 1933, № 2, p. 215.

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Февраль 1933 г.

Непременный секретарь академик *В. Волгин*

Редактор издания академик-секретарь ОМЕН А. А. Борисяк

Технический редактор Л. А. Федоров

Ученый корректор А. В. Суслов

Начато набором в ноябре 1932 г. — Подписано к печати 20 февраля 1933 г.

132 (177—308) стр. (14 фиг.) + 5 табл.

Формат бум. 72 × 110 см. — $9^1/_8$ печ. л. — 42 000 тип. зн. в печ. л. — Тираж 2700

Ленгорлит № 856. — АНИ № 54. — Заказ № 282

Типография Академии Наук СССР. В. О., 9 линия, 12

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933.
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

О ВОЗМОЖНОСТИ, ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНОГО КОМБИНИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ JACOBI'ЕВОЙ СИСТЕМЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПАРАМЕТРЫ, СТРОИТЬ JACOBI'ЕВЫ СИСТЕМЫ, НЕ СОДЕРЖАЩИЕ ТАКОГО ЧИСЛА ПАРАМЕТРОВ, НА КОТОРОЕ УМЕНЬШЕНО ЧИСЛО УРАВНЕНИЙ*

Г. В. ПФЕЙФФЕРА

(*Представлено академиком* **А. Н. Крыловым**)

Введение

Положим, что Jacobi'ева система линейных уравнений, общий интеграл которой:

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_q, \psi_{q+1}) = 0, \tag{1}$$

$$\psi_i = \psi_i(x_0, x_1, \ldots x_n, c, \alpha, \beta), \quad x_0 = z, \tag{2}$$

Φ — произвольная функция аргументов,
c, α, β — произвольные параметры, (3)

$\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_q, \psi_{q+1}$ — независимые относительно $x_0, x_1, \ldots x_n$ функции, (4)
взята в форме

$$p_k = \alpha_q^k p_q + \alpha_{q-1}^k p_{q-1} + \ldots + \alpha_1^k p_1 - \alpha_0^k, \quad k = q+1, q+2, \ldots n; \tag{5}$$

$$\alpha_j^k = \frac{\dfrac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_q, \psi_{q+1})}{D(x_0, \ldots x_{j-1}, x_k, x_{j+1}, \ldots x_q)}}{\dfrac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_q, \psi_{q+1})}{D(x_0, x_1, \ldots x_{q-1}, x_q)}}, \tag{6}$$

$$j = 0, 1, \ldots q,$$

$$u = \frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_q, \psi_{q+1})}{D(x_0, x_1, \ldots x_{q-1}, x_q)} \neq 0. \tag{7}$$

* В настоящей статье под Jacobi'евой системой мы будем разуметь полную систему линейных неоднородных уравнений с частными производными 1-го порядка, решенную относительно производных.

Предположение (7) не накладывает ограничения на общность рассуждений.

Поставим вопрос о том, при каких обстоятельствах коэффициенты (6) системы (5) не содержат параметра c, иначе говоря, при каких обстоятельствах производные по c

$$(\alpha_j^k)_c,$$

$$j=0, 1, \ldots q;\ k=q+1,\ q+2, \ldots n \tag{8}$$

тождественно равны нулю?*

Не трудно видеть что:

$$(\alpha_j^k)_c=\frac{1}{u^2}\sum_{\lambda=1}^{q+1}\left\{\frac{D\left(\psi_1,\ldots\psi_{\lambda-1},\frac{\partial\psi_\lambda}{\partial c},\psi_{\lambda+1},\ldots\psi_{q+1}\right)}{D(x_0,\ \ldots\ x_{j-1},\ x_k,\ x_{j+1},\ \ldots\ x_q)}\cdot\frac{D(\psi_1,\psi_2,\ldots\psi_q,\psi_{q+1})}{D(x_0,x_1,\ldots x_{q-1},x_q)}-\right.$$

$$\left.-\frac{D\left((\psi_1,\ldots\psi_{\lambda-1},\frac{\partial\psi_\lambda}{\partial c},\psi_{\lambda+1},\ldots\psi_{q+1}\right)}{D(x_0,x_1,\ldots x_{q-1},x_q)}\cdot\frac{D(\psi_1,\psi_2,\ldots\psi_q,\psi_{q+1})}{D(x_0,\ldots x_{j-1},x_k,x_{j+1},\ldots x_q)}\right\}, \tag{9}$$

$$j=0, 1, \ldots q;\ k=q+1,\ q+2, \ldots n.$$

В силу известной формулы теории определителей

$$A_1^{(1)}A_2^{(2)}-A_1^{(2)}A_1^{(1)}=A.A_{1,2}^{1,2}\,{}^{**} \tag{10}$$

получим

$$(\alpha_j^k)_c=\frac{1}{u^2}\sum_{\lambda=1}^{q+1}U_j^\lambda\frac{D\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial c},\ \psi_1,\ \ldots\ \psi_q,\ \psi_{q+1}\right)}{D(x_k,\ x_0,\ \ldots\ x_{q-1},\ x_q)}, \tag{11}$$

$$j=0, 1, \ldots q;\ k=q+1,\ q+2, \ldots n,$$

где

$$U_j^\lambda=(-1)^{j+\lambda-1}\frac{D(\psi_1,\ \ldots\ \psi_{\lambda-1},\ \psi_{\lambda+1},\ \ldots\ \psi_{q+1})}{D(x_0,\ \ldots\ x_{j-1},\ x_{j+1},\ \ldots\ x_q)}, \tag{12}$$

$$j=0, 1, \ldots q;\ \lambda=1, 2, \ldots q+1$$

— миноры определителя u — (7).

* При выводе искомых условий параметры α, β роли не играют; они введены для облегчения дальнейшего изложения.

** H. Weber. Lehrbuch der Algebra. Braunschweig, 1898, B. I, S. 115.

В том случае, когда коэффициенты одного из уравнений (5), напр., уравнения со значком k, не зависят от параметра c, имеет место система соотношений

$$U_j^1 \frac{D\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial c}, \psi_1, \ldots \psi_q, \psi_{q+1}\right)}{D(x_k, x_0, \ldots x_{q-1}, x_q)} + U_j^2 \frac{D\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial c}, \psi_1, \ldots \psi_q, \psi_{q+1}\right)}{D(x_k, x_0, \ldots x_{q-1}, x_q)} + \\ + \ldots + U_j^{q+1} \frac{D\left(\frac{\partial\psi_{q+1}}{\partial c}, \psi_1, \ldots \psi_q, \psi_{q+1}\right)}{D(x_k, x_0, \ldots x_{q-1}, x_q)} = 0 \tag{13}$$

$$j = 0, 1, \ldots q,$$

определитель которой

$$\begin{vmatrix} U_0^1, & U_0^2, & \ldots & U_0^{q+1} \\ U_1^1, & U_1^2, & \ldots & U_1^{q+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_q^1, & U_q^2, & \ldots & U_q^{q+1} \end{vmatrix}, \tag{14}$$

как взаимный с определителем u — (7), отличен от нуля.

Систему (13) можно заменить системой:

$$\frac{D\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial c}, \psi_1, \ldots \psi_q, \psi_{q+1}\right)}{D(x_k, x_0, \ldots x_{q-1}, x_q)} = 0, \quad \frac{D\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial c}, \psi_1, \ldots \psi_q, \psi_{q+1}\right)}{D(x_k, x_0, \ldots x_{q-1}, x_q)} = 0, \ldots \\ \ldots \frac{D\left(\frac{\partial\psi_{q+1}}{\partial c}, \psi_1, \ldots \psi_q, \psi_{q+1}\right)}{D(x_k, x_0, \ldots x_{q-1}, x_q)} = 0. \tag{15}$$

Ясно, что если ни один из коэффициентов Iacobi'евой системы (5) не зависит от параметра c, то необходимы, они же и достаточны, тождества

$$\frac{D\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial c}, \psi_1, \ldots \psi_q, \psi_{q+1}\right)}{D(x_k, x_0, \ldots x_{q-1}, x_q)} = 0, \quad \frac{D\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial c}, \psi_1, \ldots \psi_q, \psi_{q+1}\right)}{D(x_k, x_0, \ldots x_{q-1}, x_q)} = 0, \ldots \\ \ldots \frac{D\left(\frac{\partial\psi_{q+1}}{\partial c}, \psi_1, \ldots \psi_q, \psi_{q+1}\right)}{D(x_k, x_0, \ldots x_{q-1}, x_q)} = 0, \tag{16}$$

$$k = q+1, q+2, \ldots n,$$

равносильные, ввиду условия (7), тождествам

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial\psi_1}{\partial c} &\equiv \omega_1(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{q+1}, c, \alpha, \beta),\\
\frac{\partial\psi_2}{\partial c} &\equiv \omega_2(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{q+1}, c, \alpha, \beta),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial\psi_{q+1}}{\partial c} &\equiv \omega_{q+1}(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{q+1}, c, \alpha, \beta).
\end{aligned}
\right\} \tag{17}
$$

Jacobi'ева система (5), если соблюдены условия (17), что то же, коэффициенты α_j^k не зависят от параметра c, помимо интегралов:

$$
\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_q, \psi_{q+1}, \tag{18}
$$

$$
\psi_i = \psi_i(x_0, x_1, \ldots x_n, c, \alpha, \beta),
$$

обладает также интегралами:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_q, \varphi_{q+1},\\
&\varphi_i = \varphi_i(x_0, x_1, \ldots x_n, \alpha, \beta).
\end{aligned}
\right\} \tag{19}
$$

Последние выражаются через интегралы (18) и параметр c:

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi_1 &= \pi_1(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{q+1}, c, \alpha, \beta),\\
\varphi_2 &= \pi_2(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{q+1}, c, \alpha, \beta),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi_{q+1} &= \pi_{q+1}(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{q+1}, c, \alpha, \beta),\\
&\frac{D(\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_{q+1})}{D(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{q+1})} \not\equiv 0.
\end{aligned}
\right\} \tag{20}
$$

Функции (19) могут быть найдены интегрированием системы (5), но, когда известны интегралы (18) и соотношения (17), достаточно проинтегрировать линейное уравнение

$$
\frac{\partial\pi}{\partial c} + \omega_1\frac{\partial\pi}{\partial\psi_1} + \omega_2\frac{\partial\pi}{\partial\psi_2} + \ldots + \omega_{q+1}\frac{\partial\pi}{\partial\psi_{q+1}} = 0, \tag{21}
$$

$$
\frac{dc}{1} = \frac{d\psi_1}{\omega_1} = \frac{d\psi_2}{\omega_2} = \ldots = \frac{d\psi_{q+1}}{\omega_{q+1}}. \tag{22}
$$

Из равенств (20) имеем

$$\begin{gathered}\psi_1 = \mathfrak{r}_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, c, \alpha, \beta),\\ \psi_2 = \mathfrak{r}_2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, c, \alpha, \beta),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \psi_{q+1} = \mathfrak{r}_{q+1}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, c, \alpha, \beta),\\ \frac{D(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots \mathfrak{r}_{q+1})}{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1})} \neq 0.\end{gathered} \tag{23}$$

Теорема: «Для того, чтобы $q+1$ функций (18), содержащих параметр c, выражались через параметр c и $q+1$ функций (19), не содержащих параметр c, необходимо и достаточно выполнение условий (17)».

---

§ 1. Построение, помощью линейного комбинирования уравнений Jacobi'евой системы, Jacobi'евых систем с меньшим числом уравнений

Jacobi'еву систему (5), в предположении, что коэффициенты ее не содержат параметра c, т. е. в предположении, что общий интеграл ее

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_q, \varphi_{q+1}) = 0, \tag{24}$$

$$\varphi_i = \varphi_i(x_0, x_1, \ldots x_n, \alpha, \beta), \quad x_0 = z, \tag{25}$$

Φ — произвольная функция аргументов, (26)
α, β — произвольные параметры,

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_q, \varphi_{q+1}$ — независимые относительно $x_0, x_1, \ldots x_n$ функции, (27)

возьмем в форме

$$\begin{gathered}p_{q+1} = \alpha_q^{q+1} p_q + \alpha_{q-1}^{q+1} p_{q-1} + \ldots + \alpha_1^{q+1} p_1 - \alpha_0^{q+1},\\ p_k = \alpha_q^k p_q + \alpha_{q-1}^k p_{q-1} + \ldots + \alpha_1^k p_1 - \alpha_0^k,\\ k = q+2, q+3, \ldots n,\end{gathered} \tag{28}$$

$$\alpha_j^{q+1} = \frac{\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_q, \varphi_{q+1})}{D(x_0, \ldots x_{j-1}, x_{q+1}, x_{j+1}, \ldots x_q)}}{\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_q, \varphi_{q+1})}{D(x_0, x_1, \ldots x_{q-1}, x_q)}},$$

$$\alpha_j^{k} = \frac{\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_q, \varphi_{q+1})}{D(x_0, \ldots x_{j-1}, x_k, x_{j+1}, \ldots x_q)}}{\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_q, \varphi_{q+1})}{D(x_0, x_1, \ldots x_{q-1}, x_q)}}, \tag{29}$$

$$j = 0, 1, \ldots q,$$

$$u = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_q, \varphi_{q+1})}{D(x_0, x_1, \ldots x_{q-1}, x_q)} \not\equiv 0 \tag{30}$$

и примем, что коэффициенты системы (28) от параметров α, β зависят.

По системе (28) построим систему

$$p_k = R^k_{q+1} p_{q+1} + \sum_{j=1}^{q} \left(\alpha_j^{k} - R^k_{q+1} \alpha_j^{q+1}\right) p_j - \left(\alpha_0^{k} - R^k_{q+1} \alpha_0^{q+1}\right), \tag{31}$$

$$k = q+2, q+3, \ldots n,$$

где

$$R^{q+2}_{q-1}, R^{q+3}_{q+1}, \ldots R^{n}_{q+1} \tag{32}$$

— некоторые множители, и потребуем, чтобы система (31) была Jacobi'евой.

Эта задача всегда возможна, и решение ее зависит от произвольной функции.

Присоединив к функциям (27) произвольную функцию φ, обладающую свойством

$$v = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi)}{D(x_0, x_1, \ldots x_q, x_{q+1})} \not\equiv 0, \tag{33}$$

составим Jacobi'еву систему с общим интегралом

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi) = 0. \tag{34}$$

Она такова

$$p_k = \beta^k_{q+1} p_{q+1} + \sum_{j=1}^{b} \beta_j^{k} p_j - \beta_0^{k}, \tag{35}$$

$$k = q+2, q+3, \ldots n,$$

$$\beta_{q+1}^{k}=\frac{\dfrac{D(\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_{q+1},\varphi)}{D(x_0,x_1,\ldots x_q,x_k)}}{\dfrac{D(\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_{q+1},\varphi)}{D(x_0,x_1,\ldots x_q,x_{q+1})}},\quad \beta_j^{k}=\frac{\dfrac{D(\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_{q+1},\varphi)}{D(x_0,\ldots x_{j-1},x_k,x_{j+1},\ldots x_{q+1})}}{\dfrac{D(\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_{q+1},\varphi)}{D(x_0,x_1,\ldots x_q,x_{q+1})}}, \tag{36}$$

$$j=0,\ 1,\ \ldots\ q.$$

Там, где необходимо будет, для упрощения записи, будем считать, что

$$\varphi\equiv\varphi_{q+2}. \tag{37}$$

Поставив в системе (31) на места множителей (32) выражения

$$\beta_{q+1}^{q+2},\ \beta_{q+1}^{q+3},\ \ldots\ \beta_{q+1}^{n}, \tag{38}$$

получим систему, которая, как сейчас увидим, тождественна системе (35), ибо

$$\alpha_j^{k}-\beta_{q+1}^{k}\,\alpha_j^{q+1}\equiv\beta_j^{k},$$
$$j=0,\ 1,\ \ldots\ q;\ k=q+2,\ q+3,\ \ldots\ n. \tag{39}$$

В самом деле, соотношения (39) приводят к зависимостям

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_{q+1},\varphi)}{D(x_0,\ldots x_{j-1},x_k,x_{j+1},\ldots x_{q+1})}\cdot\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_q,\varphi_{q+1})}{D(x_0,x_1,\ldots x_{q-1},x_q)}\equiv$$
$$\equiv\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_q,\varphi_{q+1})}{D(x_0,\ldots x_{j-1},x_k,x_{j+1},\ldots x_q)}\cdot\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_{q+1},\varphi)}{D(x_0,x_1,\ldots x_q,x_{q+1})}-$$
$$-\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_{q+1},\varphi)}{D(x_0,x_1,\ldots x_q,x_k)}\cdot\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_q,\varphi_{q+1})}{D(x_0,\ldots x_{j-1},x_{q+1},x_{j+1},\ldots x_q)},$$
$$j=0,\ 1,\ \ldots\ q;\ k=q+2,\ q+3,\ \ldots\ n,$$

которые представляют тождества

$$M\cdot M_{\tau_1\tau_2}^{\sigma_2\sigma_2}\equiv\begin{vmatrix} M_{\tau_1}^{\sigma_1}, & M_{\tau_2}^{\sigma_1}\\ M_{\tau_1}^{\sigma_2}, & M_{\tau_2}^{\sigma_2}\end{vmatrix}^{*}, \tag{40}$$

написанные в форме

$$M_{\tau_1}^{\sigma_1}M_{\tau_2}^{\sigma_2}\equiv MM_{\tau_1\tau_2}^{\sigma_1\sigma_2}+M_{\tau_2}^{\sigma_1}M_{\tau_1}^{\sigma_2},\ M=v\mp0 \tag{41}$$

* M. Hamburger, Anwendung einer gewissen Determinantenrelation auf die Integration partieller Differentialgleichungen. Journ. für die reine und ang. Math., B. 100, Berlin, 1887, SS. 340—346. — E. Pascal, Die Determinaten. Leipzig, 1900, SS. 115—121.

и связанные с матриссами

$$\left\| \begin{array}{cccccccccc} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_0}, & \ldots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}, & \ldots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_q}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{q+1}}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_k}, & 0 \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_0}, & \ldots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}, & \ldots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_q}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_{q+1}}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_k}, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\varphi_{q+1}}{\partial x_0}, & \ldots & \frac{\partial\varphi_{q+1}}{\partial x_j}, & \ldots & \frac{\varphi_{q+1}}{\partial xq}, & \frac{\partial\varphi_{q+1}}{\partial x_{q+1}}, & \frac{\partial\varphi_{q+1}}{\partial x_k}, & 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_0}, & \ldots & \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}, & \ldots & \frac{\partial\varphi}{\partial x_q}, & \frac{\partial\varphi}{\partial x_{q+1}}, & \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}. & 0 \\ \hline & & \tau_1 & & & \tau_2 & \sigma_1 & \sigma_2 \end{array} \right\| . \tag{41}$$

Так как общий интеграл (34) системы (35) содержит функцию φ, которой нет в общем интеграле (24) системы (28), то ясно, что переход от системы (28) к системе (35) связан с произвольной функцией φ.

Коэффициенты системы (35) могут быть составлены по формулам (36), но и по формулам

$$\begin{gathered} \beta_{q+1}^k = \frac{\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi)}{D(x_0, x_1, \ldots x_q, x_k)}}{\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi)}{D(x_0, x_1, \ldots x_q, x_{q+1})}}, \\ \beta_j^k = \alpha_j^k - \beta_{q+1}^k \alpha_j^{q+1}, \\ j = 0, 1, \ldots q; \; k = q+2, q+3 \ldots n. \end{gathered} \tag{42}$$

Jacobi'еву систему (5), в предположении, что коэффициенты ее не содержат параметра c, иначе говоря, систему (28) запишем в форме

$$\begin{gathered} p_{q+1} = \alpha_q^{q+1} p_q + \alpha_{q-1}^{q+1} p_{q-1} + \ldots + \alpha_1^{q+1} p_1 - \alpha_0^{q+1}, \\ p_{q+2} = \alpha_q^{q+2} p_q + \alpha_{q-1}^{q+2} p_{q-1} + \ldots + \alpha_1^{q+2} p_1 - \alpha_0^{q+2}, \\ p_k = \alpha_q^k p_q + \alpha_{q-1}^k p_{q-1} + \ldots + \alpha_1^k p_1 - \alpha_0^k, \\ k = q+3, q+4, \ldots n, \end{gathered} \tag{43}$$

$$\alpha_j^{q+1} = \frac{\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_q, \varphi_{q+1})}{D(x_0, \ldots x_{j-1}, x_{q+1}, x_{j+1}, \ldots x_q)}}{\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_q, \varphi_{q+1})}{D(x_0, x_1, \ldots x_{q-1}, x_q)}},$$

$$\alpha_j^{q+2} = \frac{\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_q, \varphi_{q+1})}{D(x_0, \ldots x_{j-1}, x_{q+2}, x_{j+1}, \ldots x_q)}}{\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_q, \varphi_{q+1})}{D(x_0, x_1, \ldots x_{q-1}, x_q)}}, \tag{44}$$

$$\alpha_j^{k} = \frac{\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_q, \varphi_{q+1})}{D(x_0, x_1, \ldots x_{j-1}, x_k, x_{j+1}, \ldots x_q)}}{\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_q, \varphi_{q+1})}{D(x_0, x_1, \ldots x_{q-1}, x_q)}},$$

$$j = 0, 1, \ldots q;$$

$$u = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_q, \varphi_{q+1})}{D(x_0, x_1, \ldots x_{q-1}, x_q)} \neq 0 \tag{45}$$

и примем, что коэффициенты системы (43) от параметров α, β зависят.

По системе (43) строим систему:

$$p_k = S^k_{q+2} p_{q+2} + R^k_{q+1} p_{q+1} + \sum_{j=1}^{q} \left(\alpha_j^{\,k} - S^k_{q+2}\,\alpha_j^{\,q+2} - R^k_{q+1}\,\alpha_j^{\,q+1}\right) p_j -$$
$$- \left(\alpha_0^{\,k} - S^k_{q+2}\,\alpha_0^{\,q+2} - R^k_{q+1}\,\alpha_0^{\,q+1}\right), \tag{46}$$
$$k = q+3, q+4, \ldots n,$$

где

$$S^{q+3}_{q+2}, S^{q+4}_{q+2}, \ldots S^{n}_{q+2},$$
$$R^{q+3}_{q+1}, R^{q+4}_{q+1}, \ldots R^{n}_{q+1} \tag{47}$$

— некоторые множители, и требуем, чтобы система (46) была Jacobi'евой.

Эта задача всегда возможна, и решение ее зависит от двух произвольных функций.

Присоединив к функциям (27) произвольные функции φ, ψ, обладающие свойством

$$w = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi)}{D(x_0, x_1, \ldots x_q, x_{q+1}, x_{q+2})} \neq 0, \tag{48}$$

составим Jacobi'еву систему с общим интегралом:

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi) = 0. \tag{49}$$

Она такова

$$p_k = \gamma_{q+2}^k p_{q+2} + \gamma_{q+1}^k p_{q+1} + \sum_{j=1}^{q} \gamma_j^k p_j - \gamma_0^k, \tag{50}$$

$$k = q+3,\, q+4,\, \ldots n;$$

$$\gamma_{q+2}^k = \frac{\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi)}{D(x_0, x_1, \ldots x_p, x_{q+1}, x_k)}}{\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi)}{D(x_0, x_1, \ldots x_q, x_{q+1}, x_{q+2})}},$$

$$\gamma_{q+1}^k = \frac{\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi)}{D(x_0, x_1, \ldots x_q, x_k, x_{q+1})}}{\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi)}{D(x_0, x_1, \ldots x_q, x_{q+1}, x_{q+2})}}, \tag{51}$$

$$\gamma_j^k = \frac{\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi)}{D(x_0, \ldots x_{j-1}, x_k, x_{j+1}, \ldots x_{q+1}, x_{q+2})}}{\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi)}{D(x_0, x_1, \ldots x_q, x_{q+1}, x_{q+2})}},$$

$$j = 0, 1, \ldots q.$$

Там, где необходимо будет, для упрощения записи, будем считать, что

$$\varphi = \varphi_{q+2}, \quad \psi = \varphi_{q+3}. \tag{52}$$

Поставив в системе (46) на места множителей (47) выражения

$$\begin{matrix} \gamma_{q+2}^{q+3}, \gamma_{q+2}^{q+4}, \ldots \gamma_{q+2}^{n}, \\ \gamma_{q+1}^{q+3}, \gamma_{q+1}^{q+4}, \ldots \gamma_{q+1}^{n}, \end{matrix} \tag{53}$$

получим систему, которая, как сейчас увидим, тождественна системе (50), ибо

$$\alpha_j^k - \gamma_{q+2}^k \alpha_j^{q+2} - \gamma_{q+1}^k \alpha_j^{q+1} \equiv \gamma_j^k, \tag{54}$$

$$j = 0, 1, \ldots q; \quad k = q+3, q+4, \ldots n.$$

В самом деле, соотношения (54) приводят к зависимостям

$$\frac{D(\varphi_1, \ldots \varphi_q, \varphi_{q+1})}{D(x_1, \ldots x_{q-1}, x_q)} \cdot \frac{D(\varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi)}{D(x_0, \ldots x_{j-1}, x_k, x_{j+1}, \ldots x_{q+1}, x_{q+2})} =$$
$$= \frac{D(\varphi_1, \ldots \varphi_q, \varphi_{q+1})}{D(x_0, \ldots x_{j-1}, x_k, x_{j+1}, \ldots x_q)} \cdot \frac{D(\varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi)}{D(x_0, \ldots x_{q+1}, x_{q+2})} -$$
$$- \frac{D(\varphi_1, \ldots \varphi_q, \varphi_{q+1})}{D(x_0, \ldots x_{j-1}, x_{q+1}, x_{j+1}, \ldots x_q)} \cdot \frac{D(\varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi)}{D(x_0, \ldots x_q, x_k, x_{q+2})} - \quad (55)$$
$$- \frac{D(\varphi_1, \ldots \varphi_q, \varphi_{q+1})}{D(x_0, \ldots x_{j-1}, x_{q+2}, x_{j+1}, \ldots x_q)} \cdot \frac{D(\varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi)}{D(x_0, \ldots x_q, x_{q+1}, x_k)}$$
$$j = 0, 1, \ldots q; \; k = q+3, q+4, \ldots n,$$

которые представляют тождества

$$M^2 \cdot M^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}_{\tau_1 \tau_2 \tau_3} = \begin{vmatrix} M^{\sigma_1}_{\tau_1}, & M^{\sigma_1}_{\tau_2}, & M^{\sigma_1}_{\tau_3} \\ M^{\sigma_2}_{\tau_1}, & M^{\sigma_2}_{\tau_2}, & M^{\sigma_2}_{\tau} \\ M^{\sigma_3}_{\tau_1}, & M^{\sigma_2}_{\tau_3}, & M^{\sigma_3}_{\tau_3} \end{vmatrix}^*, \quad (56)$$

что то же

$$M \cdot M^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}_{\tau_1 \tau_2 \tau_3} = M^{\sigma_1}_{\tau_1} M^{\sigma_2 \sigma_3}_{\tau_2 \tau_3} - M^{\sigma_1}_{\tau_2} M^{\sigma_2 \sigma_3}_{\tau_1 \tau_3} + M^{\sigma_1}_{\tau_3} M^{\sigma_2 \sigma_3}_{\tau_1 \tau_2}, \quad (57)$$

написанные в форме

$$M^{\sigma_1}_{\tau_1} M^{\sigma_2 \sigma_3}_{\tau_2 \tau_3} = M \cdot M^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}_{\tau_1 \tau_2 \tau_3} + M^{\sigma_1}_{\tau_2} M^{\sigma_2 \sigma_3}_{\tau_1 \tau_3} - M^{\sigma_1}_{\tau_3} M^{\sigma_2 \sigma_3}_{\tau_1 \tau_2}, \; M = w \neq 0 \quad (58)$$

и связанные с матриссами

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0}, \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}, \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_q}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_{q+1}}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_{q+2}}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_k}, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_0}, \ldots & \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_j}, \ldots & \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_q}, & \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_{q+1}}, & \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_{q+2}}, & \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_k}, & 0, & 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}, \ldots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \ldots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_q}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_{q+1}}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_{q+2}}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, & 1, & 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_0}, \ldots & \frac{\partial \psi}{\partial x_j}, \ldots & \frac{\partial \psi}{\partial x_q}, & \frac{\partial \psi}{\partial x_{q+1}}, & \frac{\partial \psi}{\partial x_{q+2}}, & \frac{\partial \psi}{\partial x_k}, & 0, & 1 \\ \hline & \tau_1 & & \tau_2 & \tau_3 & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{matrix} \right\| . \quad (59)$$

* M. Hamburger, Anwendung einer gewissen Determinantenrelation auf die Integration partieller Differentialgleichungen (Journ. für die reine und ang. Math., B. 100, Berlin, 1887, SS. 340—346). — E. Pascal, Die Determinanten (Leipzig, 1900, SS. 115—121).

Так как общий интеграл (49) системы (50) содержит функции φ, ψ, которых нет в общем интеграле (24) системы (28)—(43), то ясно, что переход от системы (28)—(43) к системе (50) связан с двумя произвольными функциями φ, ψ.

Коэффициенты системы (50) могут быть построены по формулам (51) а также по выражениям (53) и формулам (54).

И т. д.

Переходя от системы (28) к системе (35), мы, в силу нетождества (33), умножали уравнение со значком $q+1$ системы (28) на множители (38) и прибавляли его к остальным уравнениям. Если бы вместо нетождества (33) было дано нетождество

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi)}{D(x_0, x_1, \ldots x_q, x_i)} \mp 0 \tag{60}$$

i — одно из чисел $q+2$, $q+3$, $\ldots$ n,

то те же действия применили бы к уравнению со значком i.

Переходя от системы (43) к системе (50), мы, в силу нетождества (48), умножали уравнения со значками $q+1$, $q+2$ системы (43) на множители (53) и прибавляли их к остальным уравнениям. Если бы вместо нетождества (48) было дано нетождество

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi)}{D(x_0, x_1, \ldots x_q, x_i, x_k)} \mp 0, \tag{61}$$

i, k — комбинация чисел $q+1$, $q+2$, $\ldots$ n, кроме комбинации

$$q+1,\ q+2,$$

то те же действия применили бы к уравнениям со значками i, k.

§ 2. Построение, помощью линейного комбинирования уравнений Jacobi'евой системы, содержащей параметры, Jacobi'евых систем, не содержащих такого числа параметров, на которое уменьшено число уравнений.

Сделав предположение, что системы (28), (43) содержат параметры α, β, что равносильно допущению, что хоть одна, а может быть и все группы количеств

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \alpha, \beta,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial\varphi_{q+1}}{\partial\alpha}, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \alpha, \beta$$

и группы количеств

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \alpha, \beta,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial\varphi_{q+1}}{\partial\beta}, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \alpha, \beta$$

независимы,

$$\Omega_\lambda\left(\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \alpha, \beta\right) \not\equiv 0, \tag{62}$$

λ — одно или все числа ряда $1, 2, \ldots q+1$,

и

$$\Omega_\mu\left(\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \alpha, \beta\right) \not\equiv 0, \tag{63}$$

μ — одно или все числа ряда $1, 2, \ldots q+1$,

решим следующего рода задачи.

При каких обстоятельствах

I) Коэффициенты системы (35) не содержат параметра α?

II) Коэффициенты системы (35) не содержат параметра β?

III) Коэффициенты системы (50) не заключают в себе параметров α, β?

Задача I. Должны иметь место тождества

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha} \equiv f_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \alpha, \beta), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial\varphi_{q+1}}{\partial\alpha} \equiv f_{q+1}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \alpha, \beta), \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \equiv f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \alpha, \beta), \end{aligned} \tag{64}$$

причем одно из первых $q+1$, а может быть и все, обязательно содержат φ.

Положим, что φ входит в тождество

$$\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha} \equiv f_\lambda(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \alpha, \beta) \tag{65}$$

и, следовательно,

$$\varphi \equiv F\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}\right), \tag{66}$$

тогда тождества (64) равносильны тождеству (66) и тождествам

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha} \equiv \omega_1\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial\varphi_{\lambda-1}}{\partial\alpha} \equiv \omega_{\lambda-1}\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}\right),\\
&\frac{\partial\varphi_{\lambda+1}}{\partial\alpha} \equiv \omega_{\lambda+1}\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial\varphi_{q+1}}{\partial\alpha} \equiv \omega_{q+1}\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}\right);
\end{aligned} \tag{67}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial\alpha^2} \equiv \omega\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}\right). \tag{68}$$

Система (35) при условиях (67), (68) не содержит параметра α, если функция φ—выражение (66). Это наиболее общий вид функции φ; по коэффициентам (36) системы (35) видно, что φ можно взять в форме

$$\varphi = \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}. \tag{69}$$

Если принято, что система (35) не содержит параметра α, то помимо интегралов:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi = \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}, \tag{70}$$

ей принадлежат интегралы

$$\begin{aligned}
&u_1, u_2, \ldots u_{q+1}, u_{q+2},\\
&u_i \equiv u_i(x_0, x_1, \ldots x_n, \beta);
\end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned}
&u_1 = K_1\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&u_{q+2} = K_{q+2}\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}\right).
\end{aligned} \tag{72}$$

Функции

$$K_1, K_2, \ldots K_{q+2}, \tag{73}$$

как не зависящие от α, — решения линейного уравнения с частными производными первого порядка

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} &\frac{\partial K}{\partial \alpha} + \omega_1 \frac{\partial K}{\partial \varphi_1} + \ldots + \omega_{\lambda-1} \frac{\partial K}{\partial \varphi_{\lambda-1}} + \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha} \frac{\partial K}{\partial \varphi_\lambda} + \\ &+ \omega_{\lambda+1} \frac{\partial K}{\partial \varphi_{\lambda+1}} + \ldots + \omega_{q+1} \frac{\partial K}{\partial \varphi_{q+1}} + \omega \frac{\partial K}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}\right)} = 0. \end{aligned} \tag{74}$$

Задача II. Должны иметь место тождества

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} \equiv f_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \alpha, \beta), \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial \beta} \equiv f_{q+1}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \alpha, \beta), \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \equiv f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \alpha, \beta), \end{aligned} \tag{75}$$

причем одно из первых $q+1$, а может быть и все, обязательно содержат φ.

Положим, что φ входит в тождество

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta} \equiv f_\mu(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \alpha, \beta) \tag{76}$$

и, следовательно

$$\varphi \equiv F\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right), \tag{77}$$

тогда тождества (75) равносильны тождеству (77) и тождествам

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} \equiv \omega_1\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right), \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\frac{\partial \varphi_{\mu-1}}{\partial \beta} \equiv \omega_{\mu-1}\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right), \\ &\frac{\partial \varphi_{\mu+1}}{\partial \beta} \equiv \omega_{\mu+1}\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right), \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial \beta} \equiv \omega_{q+1}\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right); \end{aligned} \tag{78}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial \beta^2} \equiv \omega\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right). \tag{79}$$

Система (35) при условиях (78), (79) не содержит параметра β, если функция φ — выражение (77). Это наиболее общий вид функции φ; по коэффициентам (36) системы (35) видно, что φ можно взять в форме

$$\varphi = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}. \tag{80}$$

Если принять, что система (35) не содержит параметра β, то помимо интегралов

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}, \tag{81}$$

ей принадлежат интегралы

$$\begin{gathered} v_1, v_2, \ldots v_{q+1}, v_{q+2}, \\ v_i \equiv v_i(x_0, x_1, \ldots x_n, \alpha); \end{gathered} \tag{82}$$

$$\begin{gathered} v_1 = L_1\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{q+2} = L_{q+2}\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right). \end{gathered} \tag{83}$$

Функции

$$L_1, L_2, \ldots L_{q+2}, \tag{84}$$

как независящие от β, — решения линейного уравнения с частными производными первого порядка

$$\text{b)} \quad \begin{gathered} \frac{\partial L}{\partial \beta} + \omega_1 \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} + \ldots + \omega_{\mu-1} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{\mu-1}} + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta} \frac{\partial L}{\partial \varphi_\mu} + \\ + \omega_{\mu+1} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{\mu+1}} + \ldots + \omega_{q+1} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{q+1}} + \omega \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right)} = 0. \end{gathered} \tag{85}$$

Положим, что коэффициенты системы (35) не зависят ни от α, ни от β, тогда тождества (64), (65) имеют место одновременно, при одной и той же функции φ

$$\begin{gathered}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\alpha}\equiv f_i^1(\varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \alpha, \beta),\\ i=1, 2, \ldots q+1,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\equiv f^1(\varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \alpha, \beta),\\ \frac{\partial\varphi_k}{\partial\beta}\equiv f_k^2(\varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \alpha, \beta),\\ k=1, 2, \ldots q+1,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\equiv f^2(\varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \alpha, \beta).\end{gathered} \tag{86}$$

Записать тождества (86) можно в форме

$$\begin{gathered}\varphi\equiv F\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}\right),\\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial\alpha}\equiv\omega_i\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}\right),\\ i=1, 2, \ldots \lambda-1, \lambda+1, \ldots q+1,\\ \frac{\partial\varphi_k}{\partial\beta}\equiv\tilde{\omega}_k\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}\right),\\ k=1, 2, \ldots q+1,\\ \frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial\alpha^2}\equiv\omega\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}\right),\\ \frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial\alpha\partial\beta}\equiv\varphi\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}\right)\end{gathered} \tag{87}$$

и в форме

$$\begin{gathered}\varphi\equiv F\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}\right),\\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial\alpha}\equiv\omega_i\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}\right),\\ i=1, 2, \ldots q+1,\\ \frac{\partial\varphi_k}{\partial\beta}\equiv\tilde{\omega}_k\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}\right),\\ k=1, 2, \ldots \mu-1, \mu+1, \ldots q+1,\\ \frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\beta^2}\equiv\tilde{\omega}\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+2}, \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}\right),\\ \frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\alpha\partial\beta}\equiv\tilde{\varphi}\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}\right).\end{gathered} \tag{88}$$

По коэффициентам (36) системы (35) видно, что наипростейшие выражения функции φ:

$$\varphi = \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha} \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}. \tag{89}$$

Если бы, помощью линейного комбинирования $n-q+1$ уравнений системы (35), не содержащей параметров α, β, т. е. обладающей свойством (86), мы построим Jacobi'еву систему $n-q-2$ уравнений, не содержащую параметров α, β, присоединив к интегралам системы (35)

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi \tag{90}$$

функцию

$$\psi = \psi(x_0, x_1, \ldots x_n, \alpha, \beta), \tag{91}$$

то последняя удовлетворяла бы соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} &\equiv \text{fonct}(\varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi, \alpha, \beta), \\ \frac{\partial \psi}{\partial \beta} &\not\equiv \text{fonct}(\varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi, \alpha, \beta). \end{aligned} \tag{92}$$

Приведенный случай в дальнейшем изложении мы рассматривать не будем.

Задача III. Должны иметь место тождества

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} &\equiv f_1^{(2)}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi, \alpha, \beta), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial \alpha} &\equiv f_{q+1}^{(1)}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi, \alpha, \beta), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} &\equiv f_{q+2}^{(1)}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi, \alpha, \beta), \\ \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} &\equiv f_{q+3}^{(1)}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi, \alpha, \beta), \end{aligned} \tag{93}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} &\equiv f_1^{(1)}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi, \alpha, \beta) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial \beta} &\equiv f_{q+1}^{(2)}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi, \alpha, \beta), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} &\equiv f_{q+2}^{(2)}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi, \alpha, \beta), \\ \frac{\partial \psi}{\partial \beta} &\equiv f_{q+3}^{(2)}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi, \alpha, \beta). \end{aligned} \tag{94}$$

В первых $q+1$ тождествах (93) и (94) функции φ, ψ отсутствовать не могут, ибо тогда системы (28), (43) параметров α, β не содержали бы; среди первых $q+1$ тождеств (93) и (94) хоть одно заключает в себе функции φ, ψ — одну или обе.

Функции φ, ψ в системе (50) равноправны. Переставляя их в системах тождеств (93) и (94) вместе с двумя последними тождествами, изменим только обозначения, поэтому различного рода подразделения будем относить к одной из функций φ, ψ, для определенности к функции ψ.

Положим, что функции φ, ψ, обе или одна функция φ, входят в тождества

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}\equiv f_1^{(1)}, \ldots \frac{\partial\varphi_{q+1}}{\partial\alpha}=f_{q+1}^{(1)}, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}\equiv f_1^{(2)}, \ldots \frac{\partial\varphi_{q+1}}{\partial\beta}\equiv f_{q+1}^{(2)}. \tag{95}$$

Они могут оказаться несущественными параметрами системы функций

$$f_1^{(1)}, \ldots f_{q+1}^{(1)}, \quad f_1^{(2)}, \ldots f_{q+1}^{(2)} \tag{96}$$

— ни одна пара соотношений (95) не решается относительно функций φ, ψ — тогда, введением новой функции вместо функции φ, достигнем того, что в первых $q+1$ тождествах (93) и (94) функции ψ не будет; в $(q+2)$-х тождествах (93) и (94) отсутствовать одновременно она не может, ибо выполнялись бы условия (86), (92), при которых коэффициенты системы (35) параметров α, β не содержат.

Конечно, функции φ, ψ могут оказаться существенными параметрами системы функций (96), — хоть одна пара соотношений (95) решается относительно функций φ, ψ.

В результате видим, что придется различать три случая задачи III

$$\text{III}^{a)}, \ \text{III}^{b)}, \ \text{III}^{c)}. \tag{97}$$

Случай III$^{a)}$. Функция ψ одновременно отсутствует в первых $q+1$ тождествах (93) и (94), функция φ входит в тождество

$$\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}\equiv f_\lambda^{(1)}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \alpha, \beta), \tag{98}$$

$$\varphi\equiv F\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}\right), \tag{99}$$

тогда

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} \equiv \omega_1\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial \varphi_{\lambda-1}}{\partial \alpha} \equiv \omega_{\lambda-1}\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}\right),$$

$$\frac{\partial \varphi_{\lambda+1}}{\partial \alpha} \equiv \omega_{\lambda+1}\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}\right), \qquad (100)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial \alpha} \equiv \omega_{q+1}\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}\right);$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} \equiv \tilde{\omega}_1\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \beta} \equiv \tilde{\omega}_\lambda\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}\right), \qquad (101)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial \beta} \equiv \tilde{\omega}_{q+1}\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}\right).$$

Если $(q+2)$-ое тождество (93) содержит функцию ψ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \equiv f^{(1)}_{q+2}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi, \alpha, \beta), \qquad (102)$$

$$\psi \equiv \theta\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)$$

$$\equiv \vartheta\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial \alpha^2}\right), \qquad (103)$$

тождества (93), (94) равносильны тождествам (99), (100), (101), (103) и тождествам

$$\frac{\partial^3 \varphi_\lambda}{\partial \alpha^3} \equiv \mathfrak{A}_1\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial \alpha^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial \alpha \partial \beta} \equiv \mathfrak{A}_2\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial \alpha^2}\right), \qquad (104)$$

$$\frac{\partial^3 \varphi_\lambda}{\partial \alpha^2 \partial \beta} \equiv \mathfrak{A}_3\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial \alpha^2}\right).$$

Система (50) при условиях (100), (101), (104) не содержит параметров α, β, если φ, ψ — выражения (99), (103); можно взять

$$\varphi = \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}, \quad \psi = \frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial \alpha^2}. \tag{105}$$

Когда принято, что в системе (50) нет параметров α, β, то помимо интегралов

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi = \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}, \quad \psi = \frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial \alpha^2} \tag{106}$$

ей принадлежат интегралы

$$\begin{gathered} w_1, w_2, \ldots w_{q+2}, w_{q+3}, \\ w_i \equiv w_i(x_0, x_1, \ldots x_n); \end{gathered} \tag{107}$$

$$\begin{gathered} w_1 = N_1\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial \alpha^2}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_{q+3} = N_{q+3}\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial \alpha^2}\right). \end{gathered} \tag{108}$$

Функции

$$N_1, N_2, \ldots N_{q+3}, \tag{109}$$

как независящие от α, β — решения системы линейных уравнений с частными производными первого порядка

c)
$$\begin{gathered} \frac{\partial N}{\partial \alpha} + \omega_1 \frac{\partial N}{\partial \varphi_1} + \ldots + \omega_{\lambda-1} \frac{\partial N}{\partial \varphi_{\lambda-1}} + \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha} \frac{\partial N}{\partial \varphi_\lambda} + \omega_{\lambda+1} \frac{\partial N}{\partial \varphi_{\lambda+1}} + \\ + \ldots + \omega_{q+1} \frac{\partial N}{\partial \varphi_{q+1}} + \frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial \alpha^2} \frac{\partial N}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}\right)} + \mathfrak{A}_1 \frac{\partial N}{\partial\left(\frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial \alpha^2}\right)} = 0, \\ \frac{\partial N}{\partial \beta} + \tilde{\omega}_1 \frac{\partial N}{\partial \varphi_1} + \ldots + \tilde{\omega}_{\lambda-1} \frac{\partial N}{\partial \varphi_{\lambda-1}} + \tilde{\omega}_\lambda \frac{\partial N}{\partial \varphi_\lambda} + \tilde{\omega}_{\lambda+1} \frac{\partial N}{\partial \varphi_{\lambda+1}} + \\ + \ldots + \tilde{\omega}_{q+1} \frac{\partial N}{\partial \varphi_{q+1}} + \mathfrak{A}_2 \frac{\partial N}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}\right)} + \mathfrak{A}_3 \frac{\partial N}{\partial\left(\frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial \alpha^2}\right)} = 0. \end{gathered} \tag{110}$$

Если $(q+2)$-ое тождество (94) содержит функцию ψ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\equiv f^{(2)}_{q+2}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi, \alpha, \beta), \tag{111}$$

$$\begin{aligned}\psi &\equiv \theta\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)\\ &\equiv \vartheta\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}, \frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial\alpha\partial\beta}\right),\end{aligned} \tag{112}$$

тождества (93), (94) равносильны тождествам (99), (100), (101), (112) и тождествам:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial\alpha^2} &\equiv \mathfrak{B}_1\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}, \frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial\alpha\partial\beta}\right),\\ \frac{\partial^3\varphi_\lambda}{\partial\alpha^2\partial\beta} &\equiv \mathfrak{B}_2\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}, \frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial\alpha\partial\beta}\right),\\ \frac{\partial^3\varphi_\lambda}{\partial\alpha\partial\beta^2} &\equiv \mathfrak{B}_3\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}, \frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial\alpha\partial\beta}\right).\end{aligned} \tag{113}$$

Система (50) при условиях (100), (101), (113) не содержит параметров α, β, если φ, ψ — выражения (99), (112); можно взять

$$\varphi=\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}, \quad \psi=\frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial\alpha\partial\beta}. \tag{114}$$

Когда принято, что в системе (50) нет параметров α, β, то помимо интегралов:

$$\varphi_1, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi=\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}, \quad \psi=\frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial\alpha\partial\beta} \tag{115}$$

ей принадлежат интегралы

$$\begin{aligned}&w_1, w_2, \ldots w_{q+2}, w_{q+3},\\ &w_i\equiv w_i(x_0, x_1, \ldots x_n);\end{aligned} \tag{116}$$

$$\begin{aligned}w_1 &= P_1\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}, \frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial\alpha\partial\beta}\right),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ w_{q+3} &= P_{q+3}\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\lambda}, \frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial\alpha\partial\beta}\right).\end{aligned} \tag{117}$$

Функции

$$P_1, P_2, \ldots P_{q+3}, \tag{118}$$

как независящие от α, β — решения системы линейных уравнений с частными производными первого порядка

d)
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial P}{\partial \alpha}+\omega_1\frac{\partial P}{\partial \varphi_1}+\ldots+\omega_{\lambda-1}\frac{\partial P}{\partial \varphi_{\lambda-1}}+\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}\frac{\partial P}{\partial \varphi_\lambda}+\omega_{\lambda+1}\frac{\partial P}{\partial \varphi_{\lambda+1}}+\\
&\quad+\ldots+\omega_{q+1}\frac{\partial P}{\partial \varphi_{q+1}}+\mathfrak{B}_1\frac{\partial P}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}\right)}+\mathfrak{B}_2\frac{\partial P}{\partial\left(\frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial \alpha\,\partial \beta}\right)}=0,\\
&\frac{\partial P}{\partial \beta}+\tilde{\omega}_1\frac{\partial P}{\partial \varphi_1}+\ldots+\tilde{\omega}_{\lambda-1}\frac{\partial P}{\partial \varphi_{\lambda-1}}+\tilde{\omega}_\lambda\frac{\partial P}{\partial \varphi_\lambda}+\tilde{\omega}_{\lambda+1}\frac{\partial P}{\partial \varphi_{\lambda+1}}+\\
&\quad+\ldots+\tilde{\omega}_{q+1}\frac{\partial P}{\partial \varphi_{q+1}}+\frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial \alpha\,\partial \beta}\frac{\partial P}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}\right)}+\mathfrak{B}_3\frac{\partial P}{\partial\left(\frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial \alpha\,\partial \beta}\right)}=0.
\end{aligned}\tag{119}$$

Случай III[b]). Функция ψ одновременно отсутствует в первых $q+1$ тождествах (93) и (94), функция φ входит в тождество

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\equiv f_\mu^{(2)}(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots\ \varphi_{q+1},\ \varphi,\ \alpha,\ \beta),\tag{120}$$

$$\varphi=F\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1,\ \ldots\ \varphi_{q+1},\ \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right),\tag{121}$$

тогда

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha}\equiv\omega_1\left(\alpha,\ \beta,\ \alpha_1,\ \ldots\ \varphi_{q+1},\ \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \alpha}\equiv\omega_\mu\left(\alpha,\ \alpha,\ \varphi_1,\ \ldots\ \varphi_{q+1},\ \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial \alpha}\equiv\omega_{q+1}\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1,\ \ldots\ \varphi_{q+1},\ \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right);
\end{aligned}\tag{122}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta}\equiv\tilde{\omega}_1\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1,\ \ldots\ \varphi_{q+1},\ \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial \varphi_{\mu-1}}{\partial \beta}\equiv\tilde{\omega}_{\mu-1}\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1,\ \ldots\ \varphi_{q+1},\ \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right),\\
&\frac{\partial \varphi_{\mu+1}}{\partial \beta}\equiv\tilde{\omega}_{\mu+1}\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1,\ \ldots\ \varphi_{q+1},\ \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial \beta}\equiv\tilde{\omega}_{q+1}\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1,\ \ldots\ \varphi_{q+1},\ \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right).
\end{aligned}\tag{123}$$

Если $(q+2)$-ое тождество (94) содержит функцию ψ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} \equiv f^{(2)}_{q+2}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi, \alpha, \beta), \tag{124}$$

$$\begin{aligned} \psi &\equiv \theta\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right) \\ &\equiv \vartheta\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}, \frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\beta^2}\right), \end{aligned} \tag{125}$$

тождества (93), (94) равносильны тождествам (121), (122), (123), (125) и тождествам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\alpha\partial\beta} &\equiv \mathfrak{E}_1\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}, \frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\beta^2}\right), \\ \frac{\partial^3\varphi_\mu}{\partial\alpha\partial\beta^2} &\equiv \mathfrak{E}_2\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}, \frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\beta^2}\right), \\ \frac{\partial^3\varphi_\mu}{\partial\beta^3} &\equiv \mathfrak{E}_3\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}, \frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\beta^2}\right). \end{aligned} \tag{126}$$

Система (50) при условиях (122), (123), (126) не содержит параметров α, β, если φ, ψ — выражения (121), (125); можно взять

$$\varphi = \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}, \quad \psi = \frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\beta^2}. \tag{127}$$

Когда принято, что в системе (50) нет параметров α, β, то помимо интегралов

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}, \frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\beta^2} \tag{128}$$

ей принадлежат интегралы

$$\begin{aligned} &w_1, w_2, \ldots w_{q+2}, w_{q+3}, \\ &w_i \equiv w_i(x_0, x_1, \ldots x_n); \end{aligned} \tag{129}$$

$$\begin{aligned} w_1 &= Q_1\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}, \frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\beta^2}\right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_{q+3} &= Q_{q+3}\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}, \frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\beta^2}\right). \end{aligned} \tag{130}$$

Функции

$$Q_1,\ Q_2,\ \ldots\ Q_{q+3}, \tag{131}$$

как независящие от α, β, — решения системы линейных уравнений с частными производными первого порядка

e)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial Q}{\partial\alpha}+\omega_1\frac{\partial Q}{\partial\varphi_1}+\ldots+\omega_{\mu-1}\frac{\partial Q}{\partial\varphi_{\mu-1}}+\omega_\mu\frac{\partial Q}{\partial\varphi_\mu}+\omega_{\mu+1}\frac{\partial Q}{\partial\varphi_{\mu+1}}+\\
&\quad+\ldots+\omega_{q+1}\frac{\partial Q}{\partial\varphi_{q+1}}+\mathfrak{E}_1\frac{\partial Q}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}\right)}+\mathfrak{E}_2\frac{\partial Q}{\partial\left(\frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\beta^2}\right)}=0,\\
&\frac{\partial Q}{\partial\beta}+\tilde{\omega}_1\frac{\partial Q}{\partial\varphi_1}+\ldots+\tilde{\omega}_{\mu+1}\frac{\partial Q}{\partial\varphi_{\mu-1}}+\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}\frac{\partial Q}{\partial\varphi_\mu}+\tilde{\omega}_{\mu+1}\frac{\partial Q}{\partial\varphi_{\mu+1}}+\\
&\quad+\ldots+\tilde{\omega}_{q+1}\frac{\partial Q}{\partial\varphi_{q+1}}+\frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\beta^2}\frac{\partial Q}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}\right)}+\mathfrak{E}_2\frac{\partial Q}{\partial\left(\frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\beta^2}\right)}=0.
\end{aligned} \tag{132}$$

Если $(q+2)$-ое тождество (93) содержит функцию ψ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\equiv f^{(1)}_{q+2}(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots\ \varphi_{q+1},\ \varphi,\ \psi,\ \alpha,\ \beta), \tag{133}$$

$$\begin{aligned}
\psi&\equiv\theta\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1,\ \ldots\ \varphi_{q+1},\ \varphi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)\\
&\equiv\vartheta\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1,\ \ldots\ \varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta},\ \frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right),
\end{aligned} \tag{134}$$

тождества (93), (94) равносильны тождествам (121), (122), (123), (134) и тождествам

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3\varphi_\mu}{\partial\alpha^2\,\partial\beta}&\equiv\mathfrak{D}_1\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1,\ \ldots\ \varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta},\ \frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right),\\
\frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\beta^2}&\equiv\mathfrak{D}_2\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1,\ \ldots\ \varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta},\ \frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right),\\
\frac{\partial^3\varphi_\mu}{\partial\alpha\,\partial\beta^2}&\equiv\mathfrak{D}_3\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1,\ \ldots\ \varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta},\ \frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right).
\end{aligned} \tag{135}$$

Система (50) при условиях (122), (123), (135), не содержит параметров α, β, если φ, ψ — выражения (121), (134); можно взять

$$\varphi=\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta},\quad \psi=\frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\alpha\,\partial\beta}. \tag{136}$$

Когда принято, что в системе (50) нет параметров α, β, то помимо интегралов

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}, \frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\alpha\partial\beta} \tag{137}$$

ей принадлежат интегралы

$$\begin{gathered} w_1, w_2, \ldots w_{q+2}, w_{q+3}, \\ w_i \equiv w_i(x_0, x_1, \ldots x_n); \end{gathered} \tag{138}$$

$$\begin{gathered} w_1 = R_1\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}, \frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\alpha\partial\beta}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_{q+3} = R_{q+3}\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}, \frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\alpha\partial\beta}\right). \end{gathered} \tag{139}$$

Функции

$$R_1, R_2 \ldots R_{q+3}, \tag{140}$$

как независящие от α, β, — решения системы линейных уравнений с частными производными первого порядка

f)
$$\begin{gathered} \frac{\partial R}{\partial\alpha} + \omega_1\frac{\partial R}{\partial\varphi_1} + \ldots + \omega_{\mu-1}\frac{\partial R}{\partial\varphi_{\mu-1}} + \omega_\mu\frac{\partial R}{\partial\varphi_\mu} + \omega_{\mu+1}\frac{\partial R}{\partial\varphi_{\mu+1}} + \\ + \ldots + \omega_{q+1}\frac{\partial R}{\partial\varphi_{q+1}} + \frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial R}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}\right)} + \mathfrak{D}_1\frac{\partial R}{\partial\left(\frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\alpha\partial\beta}\right)} = 0, \\ \frac{\partial R}{\partial\beta} + \tilde{\omega}_1\frac{\partial R}{\partial\varphi_1} + \ldots + \tilde{\omega}_{\mu-1}\frac{\partial R}{\partial\varphi_{\mu-1}} + \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}\frac{\partial R}{\partial\varphi_\mu} + \tilde{\omega}_{\mu+1}\frac{\partial R}{\partial\varphi_{\mu+1}} + \\ + \ldots + \tilde{\omega}_{q+1}\frac{\partial R}{\partial\varphi_{q+1}} + \mathfrak{D}_2\frac{\partial R}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}\right)} + \mathfrak{D}_3\frac{\partial R}{\partial\left(\frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\alpha\partial\beta}\right)} = 0. \end{gathered} \tag{141}$$

Случай III[c]. Функции φ, ψ входят в тождества (95), среди которых хоть одна пара решается относительно φ, ψ.

Может быть три подслучая

$$\mathrm{III}^{c,1)}, \mathrm{III}^{c,2)}, \mathrm{III}^{c,3)}. \tag{142}$$

Подслучай III c, 1). Тождества

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha} &\equiv f_\lambda^{(1)}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi, \alpha, \beta),\\
\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial\alpha} &\equiv f_\pi^{(1)}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi, \alpha, \beta)
\end{aligned} \tag{143}$$

решаются относительно φ, ψ

$$\begin{aligned}
\varphi &= F\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}, \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial\alpha}\right),\\
\psi &= \Theta\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}, \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial\alpha}\right),
\end{aligned} \tag{144}$$

тогда

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha} &\equiv \omega_1\left(\alpha, \beta, \varphi_1 \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}, \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial\alpha}\right);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial\varphi_{\lambda-1}}{\partial\alpha} &\equiv \omega_{\lambda-1}\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}, \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial\alpha}\right),\\
\frac{\partial\varphi_{\lambda+1}}{\partial\alpha} &\equiv \omega_{\lambda+1}\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}, \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial\alpha}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial\varphi_{\pi-1}}{\partial\alpha} &\equiv \omega_{\pi-1}\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}, \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial\alpha}\right),\\
\frac{\partial\varphi_{\pi+1}}{\partial\alpha} &\equiv \omega_{\pi+1}\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}, \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial\alpha}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial\varphi_{q+1}}{\partial\alpha} &\equiv \omega_{q+1}\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}, \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial\alpha}\right);
\end{aligned} \tag{145}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta} &\equiv \tilde\omega_1\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha} \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial\alpha}\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\beta} &\equiv \tilde\omega_\lambda\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}, \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial\alpha}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial\beta} &\equiv \tilde\omega_\pi\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}, \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial\alpha}\right);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial\varphi_{q+1}}{\partial\beta} &\equiv \tilde\omega_{q+1}\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}, \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial\alpha}\right).
\end{aligned} \tag{146}$$

Тождества (93), (94) равносильны тождествам (144), (145), (146) и тождествам

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial \alpha^2} &\equiv \mathfrak{E}_1\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}, \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial \alpha}\right),\\
\frac{\partial^2 \varphi_\pi}{\partial \alpha^2} &\equiv \mathfrak{E}_2\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}, \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial \alpha}\right),\\
\frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial \alpha \partial \beta} &\equiv \mathfrak{E}_3\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}, \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial \alpha}\right),\\
\frac{\partial^2 \varphi_\pi}{\partial \alpha \partial \beta} &\equiv \mathfrak{E}_4\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}, \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial \alpha}\right).
\end{aligned} \tag{147}
$$

Система (50) при условиях (145), (146), (147) не содержит параметров α, β, если φ, ψ — выражения (144); можно взять

$$
\varphi = \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}, \quad \psi = \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial \alpha}. \tag{148}
$$

Когда принято, что в системе (50), нет параметров α, β, то помимо интегралов.

$$
\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}, \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial \alpha} \tag{149}
$$

ей принадлежат интегралы

$$
\begin{gathered}
w_1, w_2, \ldots w_{q+1}, w_{q+3},\\
w_i \equiv w_i(x_0, x_1, \ldots x_n);
\end{gathered} \tag{150}
$$

$$
\begin{gathered}
w_1 = S_1\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}, \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial \alpha}\right),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
w_{q+3} = S_{q+3}\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}, \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial \alpha}\right).
\end{gathered} \tag{151}
$$

Функции

$$
S_1, S_2, \ldots S_{q+3}, \tag{152}
$$

как независящие от α, β — решения системы линейных уравнений с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} + \omega_1 \frac{\partial S}{\partial \varphi_1} + \ldots + \omega_{\lambda-1} \frac{\partial S}{\partial \varphi_{\lambda-1}} + \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha} \frac{\partial S}{\partial \varphi \lambda} + \omega_{\lambda+1} \frac{\partial S}{\partial \varphi_{\lambda+1}} +$$

$$+ \ldots + \omega_{\pi-1} \frac{\partial S}{\partial \varphi_{\pi-1}} + \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial \alpha} \frac{\partial S}{\partial \varphi_\pi} + \omega_{\pi+1} \frac{\partial S}{\partial \varphi_{\pi+1}} + \ldots +$$

$$+ \omega_{q+1} \frac{\partial S}{\partial \varphi_{\lambda+1}} + {}_1 \frac{\partial S}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}\right)} + \mathfrak{E}_2 \frac{\partial S}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_\pi}{\partial \alpha}\right)} = 0,$$

g) (153)

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} + \tilde{\omega}_1 \frac{\partial S}{\partial \varphi_1} + \ldots + \tilde{\omega}_{\lambda-1} \frac{\partial S}{\partial \varphi_{\lambda-1}} + \tilde{\omega}_\lambda \frac{\partial S}{\partial \varphi_\lambda} + \tilde{\omega}_{\lambda+1} \frac{\partial S}{\partial \varphi_{\lambda+1}} + \ldots +$$

$$+ \tilde{\omega}_{\pi-1} \frac{\partial S}{\partial \varphi_{\pi-1}} + \tilde{\omega}_\pi \frac{\partial S}{\partial \varphi_\pi} + \tilde{\omega}_{\pi+1} \frac{\partial S}{\partial \varphi_{\pi+1}} + \ldots + \tilde{\omega}_{q+1} \frac{\partial S}{\partial \varphi_{q+1}} +$$

$$+ \mathfrak{E}_3 \frac{\partial S}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}\right)} + \mathfrak{E}_4 \frac{\partial S}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_\pi}{\partial \alpha}\right)} = 0.$$

Подслучай III$^{c, 2)}$. Тождества

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta} &\equiv f_\mu^{(2)}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi, \alpha, \beta) \\ \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \beta} &\equiv f_\rho^{(2)}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \varphi, \psi, \alpha, \beta) \end{aligned} \qquad (154)$$

решаются относительно φ, ψ

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv F\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}, \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \beta}\right), \\ \psi &\equiv \Theta\left(\alpha, \beta, \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}, \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \beta}\right), \end{aligned} \qquad (155)$$

тогда

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha} \equiv \omega_1\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta},\ \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\beta}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\alpha} \equiv \omega_\mu\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta},\ \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\beta}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\alpha} \equiv \omega_\rho\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta},\ \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\beta}\right), \tag{156}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial\varphi_{q+1}}{\partial\alpha} \equiv \omega_{q+1}\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta},\ \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\beta}\right);$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta} \equiv \tilde\omega_1\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta},\ \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\beta}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial\varphi_{\mu-1}}{\partial\beta} \equiv \tilde\omega_{\mu-1}\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta},\ \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\beta}\right),$$
$$\frac{\partial\varphi_{\mu+1}}{\partial\beta} \equiv \tilde\omega_{\mu+1}\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta},\ \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\beta}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial\varphi_{\rho-1}}{\partial\beta} \equiv \tilde\omega_{\rho-1}\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta},\ \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\alpha}\right), \tag{157}$$
$$\frac{\partial\varphi_{\rho+1}}{\partial\beta} \equiv \tilde\omega_{\rho+1}\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi, \ldots \varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta},\ \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\beta}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial\varphi_{q+1}}{\partial\beta} \equiv \tilde\omega_{q+1}\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta},\ \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\beta}\right).$$

Тождества (93), (94) равносильны тождествам (155), (156), (157) и тождествам

$$\frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\alpha\partial\beta} \equiv \mathfrak{F}_1\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta},\ \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\beta}\right),$$
$$\frac{\partial^2\varphi_\rho}{\partial\alpha\partial\beta} \equiv \mathfrak{F}_2\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta},\ \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\beta}\right),$$
$$\frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial\beta^2} \equiv \mathfrak{F}_3\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta},\ \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\beta}\right) \tag{158}$$
$$\frac{\partial^2\varphi_\rho}{\partial\beta^2} \equiv \mathfrak{F}_4\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta},\ \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\beta}\right).$$

Система (50) при условиях (156), (157), (158) не содержит параметров α, β, если φ, ψ — выражения (155); можно взять

$$\varphi = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}, \quad \psi = \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \beta}. \tag{159}$$

Когда принято, что в системе (50) нет параметров α, β, то помимо интегралов:

$$\varphi_1, \ \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \quad \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \beta} \tag{160}$$

ей принадлежат интегралы

$$\begin{gathered} w_1, \ w_2, \ldots w_{q+2}, \ w_{q+3}, \\ w_i \equiv w_i(x_0, \ x_1, \ldots x_n); \end{gathered} \tag{161}$$

$$\begin{aligned} w_1 &= T_1\left(\alpha, \ \beta, \ \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \ \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}, \ \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \beta}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_{q+3} &= T_{q+3}\left(\alpha, \ \beta, \ \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1}, \ \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \rho}, \ \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \beta}\right). \end{aligned} \tag{162}$$

Функции

$$T_1, \ T_2, \ldots T_{q+3}, \tag{163}$$

как независящие от α, β — решения системы линейных уравнений с частными производными первого порядка

$$\begin{gathered} \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \omega_1 \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} + \ldots + \omega_{\mu-1} \frac{\partial T}{\partial \varphi_{\mu-1}} + \omega_\mu \frac{\partial T}{\partial \varphi_\mu} + \omega_{\mu+1} \frac{\partial T}{\partial \varphi_{\mu+1}} + \\ + \ldots + \omega_{\rho-1} \frac{\partial T}{\partial \varphi_{\rho-1}} + \omega_\rho \frac{\partial T}{\partial \varphi_\rho} + \omega_{\rho+1} \frac{\partial T}{\partial \varphi_{\rho+1}} + \ldots + \\ + \omega_{q+1} \frac{\partial T}{\partial \varphi_{q+1}} + \mathfrak{F}_1 \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right)} + \mathfrak{F}_2 \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \beta}\right)} = 0, \end{gathered}$$

h) (164)

$$\begin{gathered} \frac{\partial T}{\partial \beta} + \tilde{\omega}_1 \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} + \ldots + \tilde{\omega}_{\mu-1} \frac{\partial T}{\partial \varphi_{\mu-1}} + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta} \frac{\partial T}{\partial \varphi_\mu} + \tilde{\omega}_{\mu+1} \frac{\partial T}{\partial \varphi_{\mu+1}} + \\ + \ldots + \tilde{\omega}_{\rho-1} \frac{\partial T}{\partial \varphi_{\rho-1}} + \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \beta} \frac{\partial T}{\partial \varphi_\rho} + \tilde{\omega}_{\rho+1} \frac{\partial T}{\partial \varphi_{\rho+1}} + \ldots + \\ + \tilde{\omega}_{q+1} \frac{\partial T}{\partial \varphi_{q+1}} + \mathfrak{F}_3 \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right)} + \mathfrak{F}_4 \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \beta}\right)} = 0. \end{gathered}$$

Подслучай III [c, 3)]. Тождества

$$\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha}=f_\lambda^{(1)}(\varphi_1,\ \varphi_2,\dots\varphi_{q+1},\ \varphi,\ \psi,\ \alpha,\ \beta),$$
$$\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}\equiv f_\mu^{(2)}(\varphi_1,\ \varphi_2,\dots\varphi_{q+1},\ \varphi,\ \psi,\ \alpha,\ \beta), \tag{165}$$

решаются относительно φ, ψ

$$\varphi\equiv F\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1,\dots\varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}\right),$$
$$\psi\equiv\Theta\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1,\dots\varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}\right), \tag{166}$$

тогда

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}\equiv\omega_1\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1,\dots\varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial\varphi_{\lambda-1}}{\partial\alpha}\equiv\omega_{\lambda-1}\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1,\dots\varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}\right),$$
$$\frac{\partial\varphi_{\lambda+1}}{\partial\alpha}\equiv\omega_{\lambda+1}\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1,\dots\varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}\right), \tag{167}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\alpha}\equiv\omega_\mu\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1,\dots\varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial\varphi_{q+1}}{\partial\alpha}\equiv\omega_{q+1}\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1,\dots\varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}\right);$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}\equiv\tilde\omega_1\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1,\dots\varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\beta}\equiv\tilde\omega_\lambda\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1,\dots\varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial\varphi_{\mu-1}}{\partial\beta}\equiv\tilde\omega_{\mu-1}\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1,\dots\varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha},\ \frac{\partial\varphi\beta}{\partial\beta}\right), \tag{168}$$
$$\frac{\partial\varphi_{\mu+1}}{\partial\beta}\equiv\tilde\omega_{\mu+1}\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1,\dots\varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial\varphi_{q+1}}{\partial\beta}\equiv\tilde\omega_{q+1}\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1,\dots\varphi_{q+1},\ \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\alpha},\ \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\beta}\right).$$

Тождества (93), (94) равносильны тождествам (166), (167), (168) и тождествам

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial \alpha^2} &\equiv \mathfrak{S}_1\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1},\ \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha},\ \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right),\\
\frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial \alpha \partial \beta} &\equiv \mathfrak{S}_2\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1},\ \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha},\ \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right),\\
\frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial \alpha \partial \beta} &\equiv \mathfrak{S}_3\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1},\ \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha},\ \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right),\\
\frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial \beta^2} &\equiv \mathfrak{S}_4\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1},\ \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha},\ \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right),
\end{aligned} \tag{169}$$

Система (50) при условиях (167), (168), (169) не содержит параметров α, β, если φ, ψ — выражения (166); можно взять

$$\varphi = \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha},\quad \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}. \tag{170}$$

Когда принято, что в системе (50) нет параметров α, β, то помимо интегралов

$$\varphi_1,\ \varphi_2, \ldots \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha},\ \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta} \tag{171}$$

ей принадлежат интегралы

$$\begin{gathered}
w_1,\ w_2, \ldots w_{q+2},\ w_{q+3},\\
w_i = w_i(x_0,\ x_1, \ldots x_n);
\end{gathered} \tag{172}$$

$$\begin{gathered}
w_1 = U_1\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1},\ \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha},\ \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
w_{q+3} = U_{q+3}\left(\alpha,\ \beta,\ \varphi_1, \ldots \varphi_{q+1},\ \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha},\ \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right).
\end{gathered} \tag{173}$$

Функции

$$U_1,\ U_2, \ldots U_{q+3}, \tag{174}$$

как не зависящие от α, β — решения системы линейных уравнений с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha}+\omega_1\frac{\partial U}{\partial \varphi_1}+\ldots+\omega_{\lambda-1}\frac{\partial U}{\partial \varphi_{\lambda-1}}+\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}\frac{\partial U}{\partial \varphi_\lambda}+\omega_{\lambda+1}\frac{\partial U}{\partial \varphi_{\lambda+1}}+$$

$$+\ldots+\omega_{\mu-1}\frac{\partial U}{\partial \varphi_{\mu-1}}+\omega_\mu\frac{\partial U}{\partial \varphi_\mu}+\omega_{\mu+1}\frac{\partial U}{\partial \varphi_{\mu+1}}+\ldots+$$

$$+\omega_{q+1}\frac{\partial U}{\partial \varphi_{q+1}}+\mathfrak{G}_1\frac{\partial U}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}\right)}+\mathfrak{G}_2\frac{\partial U}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right)}=0,$$

i) (175)

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha}+\tilde{\omega}_1\frac{\partial U}{\partial \varphi_1}+\ldots+\tilde{\omega}_{\lambda-1}\frac{\partial U}{\partial \varphi_{\lambda-1}}+\tilde{\omega}_\lambda\frac{\partial U}{\partial \varphi_\lambda}+\tilde{\omega}_{\lambda+1}\frac{\partial U}{\partial \varphi_{\lambda+1}}+$$

$$+\ldots+\tilde{\omega}_{\mu-1}\frac{\partial U}{\partial \varphi_{\mu-1}}+\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\frac{\partial U}{\partial \varphi_\mu}+\tilde{\omega}_{\mu+1}\frac{\partial U}{\partial \varphi_{\mu+1}}+\ldots+$$

$$+\tilde{\omega}_{q+1}\frac{\partial U}{\partial \varphi_{q+1}}+\mathfrak{G}_3\frac{\partial U}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \alpha}\right)}+\mathfrak{G}_4\frac{\partial U}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \beta}\right)}=0.$$

Пример. Дана Jacobi'ева система (28), (43), содержащая параметры α, β

$$p_3=\frac{\alpha x_1(x_1+x_6)}{x_1+\alpha(x_1+x_6)}p_1,$$

$$p_4=-\frac{x_2}{x_0 x_4}[x_4(\alpha e^{x_5}-\sin x_4)-\beta x_0]p_2-(\alpha e^{x_5}-\sin x_4), \qquad (176)$$

$$p_5=-\frac{x_2}{x_0}(\alpha x_4 e^{x_5}-\beta x_0)p_2-\alpha x_4 e^{x_5},$$

$$p_6=\frac{x_1}{x_1+\alpha(x_1+x_6)}p_1+\frac{x_2}{x_6}p_2,$$

общий интеграл которой

$$\Phi(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3)=0, \qquad (177)$$

$$\varphi_1=(x_1+x_6)x_1^{\alpha}e^{\alpha x_3},\quad \varphi_2=x_0x_2x_4^{\beta}x_6e^{\beta x_5},\quad \varphi_3=x_0+\cos x_4+ +\alpha x_4 e^{x_5}, \qquad (178)$$

$$\frac{D(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3)}{D(x_0,\ x_1,\ x_2)}\neq 0. \qquad (179)$$

Не трудно видеть, что

$$\varphi_1 = \psi_1 \psi_3^{\alpha}, \ \varphi_2 = \psi_2 \psi_5^{\beta}, \ \varphi_3 = \psi_4 + \alpha\psi_5, \tag{180}$$

где

$$\begin{gathered} \psi_1 = x_1 + x_6, \ \psi_2 = x_0 x_2 x_6, \ \psi_3 = x_1 e^{x_3}, \ \psi_4 = x_0 + \cos x_4, \\ \psi_5 = x_4 e^{x_5}. \end{gathered} \tag{181}$$

Отметив выражения

$$\begin{gathered} \frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} = \log \psi_3, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha} = \psi_5, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{1}{\varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta} = \log \psi_5, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial \beta} = 0, \end{gathered} \tag{182}$$

переходим к установленным нами задачам.

Задача I. Построить систему (35), не содержащую параметра α.

Условия (67) не выполняются; задача невозможна.

Задача II. Построить систему (35), не содержащую параметра β.

Условия (78), (79) выполняются

$$\begin{gathered} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial \beta} = 0; \\ \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \beta^2} = \frac{1}{\varphi_2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta}\right)^2 \end{gathered} \tag{183}$$

Интегралы (81)

$$\varphi_1 = \psi_1 \psi_3^{\alpha}, \ \varphi_2 = \psi_2 \psi_5^{\beta}, \ \varphi_3 = \psi_4 + \alpha\psi_5, \ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta} = \psi_2 \psi_5^{\beta} \log \psi_5 \tag{184}$$

и решения

$$L_1 = \psi_1 \psi_3^{\alpha}, \ L_2 = \psi_2, \ L_3 = \psi_4 + \alpha\psi_5, \ L_4 = \psi_5 \tag{185}$$

линейного уравнения b)

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta}\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} + \frac{1}{\varphi_2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta}\right)^2 \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta}\right)} = 0, \tag{186}$$

связанные соотношениями

$$\varphi_1 = L_1, \ \varphi_2 = L_2 L_4^{\beta}, \ \varphi_3 = L_3, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta} = L_2 L_4^{\beta} \log L_4, \tag{187}$$

приводят к системе (35)

$$
\begin{aligned}
p_3 &= \frac{\alpha x_1 (x_1 + x_6)}{x_1 + \alpha (x_1 + x_6)} p_1, \\
p_5 &= \qquad\qquad - \frac{x_2 x_4}{x_0} \sin x_4 p_2 + x_4 p_4 - x_4 \sin x_4, \\
p_6 &= \frac{x_1}{x_1 + \alpha (x_1 + x_6)} p_1 + \frac{x_2}{x_6} p_2,
\end{aligned} \tag{188}
$$

$$
\frac{D(L_1, L_2, L_3, L_4)}{D(x_0, x_1, x_2, x_4)} \neq 0, \tag{189}
$$

не содержащей параметра β.

Выделяя в системе (176) второе уравнение, умножая его на x_4 и вычитая из третьего, получим систему (188).

Задача III. Построить систему (50), не содержащую параметров α, β.

Случай III [a]. Условия (100), (101) не выполняются; случай невозможен.

Случай III [b]. Условия (122), (123) невыполняются; случай невозможен.

Случай III [c].

Подслучай III [c, 1]. Условия (145), (146), (147) выполняются

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{1}{\varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta} = \log \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha} \right), \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial \beta} = 0, \\
\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{\varphi_1} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} \right)^2, \quad \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \alpha^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \alpha \partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \alpha \partial \beta} = 0.
\end{gathered} \tag{190}
$$

Интегралы

$$
\begin{gathered}
\varphi_1 = \psi_1 \psi_3^{\alpha}, \quad \varphi_2 = \psi_2 \psi_5^{\beta}, \quad \varphi_3 = \psi_4 + \alpha \psi_5, \\
\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} \equiv \psi_1 \psi_3^{2} \log \psi_3, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha} = \psi_5
\end{gathered} \tag{191}
$$

и решения

$$
S_1 = \log \psi_1, \quad S_2 = \psi_2, \quad S_3 = \log \psi_3, \quad S_4 = \psi_4, \quad S_5 = \psi_5 \tag{192}
$$

системы линейных уравнений g)

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha}\frac{\partial S}{\partial \varphi_1}+\frac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha}\frac{\partial S}{\partial \varphi_3}+\frac{1}{\varphi_1}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha}\right)^2\frac{\partial S}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha}\right)}=0,$$
$$\frac{\partial S}{\partial \beta}+\varphi_2\log\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha}\right)\frac{\partial S}{\partial \varphi_2}=0, \qquad (193)$$

связанные соотношениями

$$\varphi_1=e^{S_1+\alpha S_3},\ \varphi_2=S_2 S_5^{\beta},\ \varphi_3=S_4+\alpha S_5,\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha}=S_3 e^{S_1+\alpha S_3},\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha}=S_5, \qquad (194)$$

приводят к системе (50)

$$p_5=-\frac{x_2 x_4}{x_0}\sin x_4 p_2+x_4 p_4-x_4\sin x_4,$$
$$p_6=p_1+\frac{x_2}{x_6}p_2-\frac{p_3}{x_1}, \qquad (195)$$

не содержащей параметров α, β.

Если выделим в системе (176) первые два уравнения, умножим второе на x_4 и вычтем из первого, умножим первое на $\frac{1}{x_1}$ и прибавим к четвертому, то получим систему (195).

Подслучай III [c, 2)]. Условия (156), (157) не выполняется; подслучай не возможен.

Подслучай III [c, 3)]. Условия (167), (168), (169) выполняются

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha}=0,\quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha}=e^{\frac{1}{\varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta}},\quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta}=0,\quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial \beta}=0,$$
$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \alpha^2}=\frac{1}{\varphi_1}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha}\right)^2,\quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \alpha \partial \beta}=0,\quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \alpha \partial \beta}=0,\quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \beta^2}=\frac{1}{\varphi_2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta}\right)^2. \qquad (196)$$

Интегралы

$$\varphi_1=\psi_1\psi_3^{\alpha},\ \varphi_2=\psi_2\psi_5^{\beta},\ \varphi_3=\psi_4+\alpha\psi_5,\quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha}=\psi_1\psi_3^{\alpha}\log\psi_3,$$
$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta}=\psi_2\psi_5^{\beta}\log\psi_5 \qquad (197)$$

и решения:

$$U_1 = \psi_1, \ U_2 = \psi_2, \ U_3 = \log \psi_3, \ U_4 = \psi_4, \ U_5 = \log \psi_5 \qquad (198)$$

системы линейных уравнений i)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha}\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} + \qquad + e^{\frac{1}{\varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta}}\frac{\partial U}{\partial \varphi_3} + \frac{1}{\varphi_1}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha}\right)^2 \frac{\partial U}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha}\right)} = 0, \\ &\frac{\partial U}{\partial \beta} + \qquad + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta}\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} + \qquad + \frac{1}{\varphi_2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta}\right)^2 \frac{\partial U}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta}\right)} = 0, \end{aligned} \qquad (199)$$

связаные сотношениями

$$\begin{gathered} \varphi_1 = U_1 e^{\alpha U_3}, \ \varphi_2 = U_2 e^{\beta U_5}, \ \varphi_3 = U_4 + \alpha e^{U_5}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} = U_1 U_3 e^{\alpha U_3}, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta} = U_2 U_5 e^{\beta U_5}, \end{gathered} \qquad (200)$$

приводят к системе (195).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ ФИГУР ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ОДНОРОДНОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОЙ МАССЫ, СОСЕДНИХ С ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫМИ

Н. П. НЕРОНОВА

(*Представлено академиком* А. Н. Крыловым)

§ 1. Фигуры равновесия однородной вращающейся жидкой массы, соседние с эллипсоидальными, были предметом исследования Poincaré (Acta Mathematica, t. VII, 1885), ограничившимся первым приближением. Однако уже в магистерской диссертации А. М. Ляпунова 1884 года «Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости» содержание IV-го тезиса, правда не получившего какого-либо развития, говорит о том, что автору диссертации было известно о существовании некоторых, соседних с эллипсоидальными фигурами равновесия, алгебраических поверхностей, для которых в первом приближении можно удовлетворить условию равновесия. Причины, побудившие А. М. Ляпунова ограничиться лишь упоминанием о новых формах равновесия, выясняются из его вступительной лекции[1] к объявленному им (1918) в Новороссийском университете курсу «О форме небесных тел». Именно, поскольку было найдено лишь первое приближение, найти же второе и следующие не удалось, было невозможно поставить вопрос о сходимости процесса, а значит существование новых форм равновесия оставалось недоказанным. Таким образом путь, которому в данной задаче первоначально следовал А. М. Ляпунов, для нас остается неизвестным. В той же лекции он ограничивается замечанием, что, возвратившись почти двадцать лет спустя к вопросу, лишь затронутому в магистерской диссертации, и изменивши прежний метод решения задачи, ему на этот раз удалось строго доказать существование фигур равновесия, смежных с эллипсоидальными («Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation», 1906—1914).

[1] А. М. Ляпунов. О форме небесных тел. ИОФМ, 1930, № 1, стр. 25.

В настоящем исследовании излагается метод нахождения фигур относительно равновесия вращающейся жидкой массы, смежных с эллипсоидальными, приводящий в первом приближении к алгебраическим поверхностям третьего и четвертого порядка.

§ 2. Пусть имеем целый ряд с тремя переменными ξ, η, ζ и постоянными коэффициентами b, c, d, e, f, . . .

(1) $$b(\xi^2+\eta^2)+c\zeta^2+d(\xi^2+\eta^2)^2+e\zeta^4+f\zeta^2(\xi^2+\eta^2)+\ldots,$$

содержащий только четные степени переменных и симметричный по отношению к ξ и η. Сходясь абсолютно и равномерно в некоторой области, заключающей начало координат $O(\xi=\eta=\zeta=0)$, упомянутый ряд представляет в ней непрерывную функцию, обладающую неограниченным числом частных производных. Обозначим через m_1 и m_2 соответственно minimum и maximum суммы рассматриваемого ряда в той же области. Уравнение

(2) $$a=b(\xi^2+\eta^2)+c\zeta^2+d(\xi^2+\eta^2)^2+e\zeta^4+f\zeta^2(\xi^2+\eta^2)+\ldots,$$

где постоянный коэффициент a удовлетворяет неравенству

(3) $$m_1<a<m_2,$$

в системе прямоугольных декартовых координат с осями OX, OY, OZ соответствует некоторой поверхности с осью вращения OZ.

Пусть имеем однородную жидкую массу, равномерно вращающуюся вокруг неподвижной координатной оси OZ и находящуюся в состоянии относительного равновесия. Между частицами жидкости действуют силы взаимного притяжения по закону Ньютона. Давление на свободную поверхность предполагается постоянным. Будем искать уравнение поверхности вращающейся жидкой массы в форме (2), оставляя неопределенными коэффициенты и предполагая, что

(4) $$a>0,\ c>b>0,$$

причем координатные оси OX и OY рассматриваются, как неизменно связанные с вращающейся жидкостью. Условимся считать коэффициенты d, e, f, . . . по абсолютной величине малыми сравнительно с тремя первыми a, b, c и трактовать коэффициенты группы членов ряда (2), образующих целый однородный полином степени четвертой и выше по отношению к переменным ξ, η, ζ, как малые величины одного и того же порядка, возрастающего вместе со степенью выше упомянутого полинома. В настоящем исследовании, имея в виду первое приближение, мы ограничимся во всех наших вычислениях членами только первого порядка по отношению к трем коэф-

фициентам d, e, f, что ведет к удержанию в уравнении поверхности (2) членов не выше четвертой степени по отношению к переменным ξ, η, ζ. В силу указанных соображений искомая поверхность будет весьма мало отличаться от поверхности эллипсоида вращения, уравнение которого

$$a = b(\xi^2 + \eta^2) + c\zeta^2 \tag{5}$$

получается из уравнения (2), полагая $d = e = f = \ldots = 0$. Потенциал U сил притяжения вращающейся жидкостью внутренней точки $M(x, y, z)$ с массой равной единице выражается тройным интегралом, распространенным на весь объем v, занятый жидкостью,

$$U = k\rho \iiint_v \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r}, \tag{6}$$

где k обозначает коэффициент пропорциональности в законе притяжения Ньютона, ρ плотность жидкости и

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2} \tag{7}$$

расстояние от точки $M(x, y, z)$ до произвольной точки $P(\xi, \eta, \zeta)$ объема v.

Выражения для составляющих X, Y, Z силы притяжения по координатным осям имеют вид

$$\begin{aligned} X &= k\rho \iiint_v \frac{\xi - x}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \\ Y &= k\rho \iiint_v \frac{\eta - y}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \\ Z &= k\rho \iiint_v \frac{\zeta - z}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \end{aligned} \tag{8}$$

Переносим начало координат в точку $M(x, y, z)$ и вводим сферические координаты r, θ, φ по формулам

$$\xi - x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad \eta - y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad \zeta - z = r\cos\theta. \tag{9}$$

Равенства (6) и (8) преобразуются следующим образом

$$\begin{aligned} U &= k\rho \iiint_v r\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi, \\ X &= k\rho \iiint_v \sin^2\theta\cos\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi, \\ Y &= k\rho \iiint_v \sin^2\theta\sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi, \\ Z &= k\rho \iiint_v \sin\theta\cos\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi. \end{aligned} \tag{10}$$

Операция интегрирования оказывается более простой в выражениях для X, Y, Z, чем в выражении для U. Поэтому мы и обращаемся к первым. Сначала производим интегрирование по переменному r. С этой целью мы, пользуясь формулой Тейлора, приводим уравнение (2) поверхности, переписываемое для краткости письма в виде

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0, \tag{11}$$

к такой форме

$$\begin{aligned}
&F(x, y, z) + (\xi - x) F_x^{(1)} + (\eta - y) F_y^{(1)} + (\zeta - z) F_z^{(1)} + \\
&+ \frac{1}{1.2}\Big[(\xi - x)^2 F_{xx}^{(2)} + (\eta - y)^2 F_{yy}^{(2)} + (\zeta - z)^2 F_{zz}^{(2)} + \\
&+ 2(\xi - x)(\eta - y) F_{xy}^{(2)} + 2(\xi - x)(\zeta - z) F_{xz}^{(2)} + \\
&+ 2(\eta - y)(\zeta - z) F_{yz}^{(2)}\Big] + \frac{1}{1.2.3}\Big[(\xi - x)^3 F_{xxx}^{(3)} + (\eta - y)^3 F_{yyy}^{(3)} + \\
&+ (\zeta - z)^3 F_{zzz}^{(3)} + 3(\xi - x)^2(\eta - y) F_{xxy}^{(3)} + 3(\xi - x)^2(\zeta - z) F_{xxz}^{(3)} + \\
&+ 3(\xi - x)(\eta - y)^2 F_{xyy}^{(3)} + 3(\eta - y)^2(\zeta - z) F_{yyz}^{(3)} + \\
&+ 3(\xi - x)(\zeta - z)^2 F_{xzz}^{(3)} + 3(\eta - y)(\zeta - z)^2 F_{yzz}^{(3)} + \\
&+ 6(\xi - x)(\eta - y)(\zeta - z) F_{xyz}^{(3)}\Big] + \frac{1}{1.2.3.4}\Big[(\xi - x)^4 F_{xxxx}^{(4)} + \\
&+ (\eta - y)^4 F_{yyyy}^{(4)} + (\zeta - z)^4 F_{zzzz}^{(4)} + 4(\xi - x)(\eta - y)^3 F_{xyyy}^{(4)} + \\
&+ 4(\xi - x)(\zeta - z)^3 F_{xzzz}^{(4)} + 4(\xi - x)^3(\eta - y) F_{xxxy}^{(4)} + \\
&+ 4(\eta - y)(\zeta - z)^3 F_{yzzz}^{(4)} + 4(\xi - x)^3(\zeta - z) F_{xxxz}^{(4)} + \\
&+ 4(\eta - y)^3(\zeta - z) F_{yyyz}^{(4)} + 12(\xi - x)^2(\eta - y)(\zeta - z) F_{xxyz}^{(4)} + \\
&+ 12(\xi - x)(\eta - y)^2(\zeta - z) F_{xyyz}^{(4)} + 12(\xi - x)(\eta - y)(\zeta - z) F_{xyzz}^{(4)} + \\
&+ 6(\xi - x)^2(\eta - y)^2 F_{xxyy}^{(4)} + 6(\xi - x)^2(\zeta - z)^2 F_{xxzz}^{(4)} + \\
&+ 6(\eta - y)^2(\zeta - z)^2 F_{yyzz}^{(4)}\Big] = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Вычисляем значения входящих сюда производных

$$
\begin{aligned}
F(x, y, z) = -a + b(x^2 + y^2) + cz^2 + \\
+ d(x^2 + y^2)^2 + ez^4 + fz^2(x^2 + y^2),
\end{aligned}
$$

(13)

$$
\begin{aligned}
&F_x^{(1)} = 2bx + 4dx(x^2 + y^2) + 2fxz^2,\\
&F_y^{(1)} = 2by + 4dy(x^2 + y^2) + 2fyz^2,\\
&F_z^{(1)} = 2cz + 4ez^3 + 2fz(x^2 + y^2),\\
&F_{xx}^{(2)} = 2b + 4d(3x^2 + y^2) + 2fz^2,\\
&F_{yy}^{(2)} = 2b + 4d(x^2 + 3y^2) + 2fz^2,\\
&F_{zz}^{(2)} = 2c + 12ez^2 + 2f(x^2 + y^2),\\
&F_{xy}^{(2)} = 8dxy,\ F_{xz}^{(2)} = 4fxz,\ F_{yz}^{(2)} = 4fyz,\\
&F_{xxx}^{(3)} = 24dx,\ F_{yyy}^{(3)} = 24dy,\ F_{zzz}^{(3)} = 24ez,\\
&F_{xxy}^{(3)} = 8dy,\ F_{xxz}^{(3)} = 4fz,\ F_{xyy}^{(3)} = 8dx,\ F_{yyz}^{(3)} = 4fz,\\
&F_{xzz}^{(3)} = 4fx,\ F_{yzz}^{(3)} = 4fy,\ F_{xyz}^{(3)} = 0,\ F_{xxxx}^{(4)} = 24d,\\
&F_{yyyy}^{(4)} = 24d,\ F_{zzzz}^{(4)} = 24e,\ F_{xxxy}^{(4)} = 0,\ F_{xxxz}^{(4)} = 0,\\
&F_{xyyy}^{(4)} = 0,\ F_{yyyz}^{(4)} = 0,\ F_{xzzz}^{(4)} = 0,\ F_{yzzz}^{(4)} = 0,\\
&F_{xxyz}^{(4)} = 0,\ F_{xyyz}^{(4)} = 0,\ F_{xyzz}^{(4)} = 0,\ F_{xxyy}^{(4)} = 8d,\\
&F_{xxzz}^{(4)} = 4f,\ F_{yyzz}^{(4)} = 4f.
\end{aligned}
$$

Вносим найденные выше значения функции F и ее частных производных, а также значения разностей $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ по формулам (9) в уравнение (12). Имеем

(14) $$A + \alpha + (B + \beta)r + (C + \gamma)r^2 + \delta r^3 + \varepsilon r^4 = 0.$$

Здесь введены следующие сокращенные обозначения:

$$A = -a + b(x^2 + y^2) + cz^2,$$

$$B = 2(bx \sin\theta \cos\varphi + by \sin\theta \sin\varphi + cz \cos\theta),$$

$$C = b\sin^2\theta + c\cos^2\theta, \quad \alpha = d(x^2 + y^2)^2 + ez^4 + fz^2(x^2 + y^2),$$

$$\beta = \sin\theta\cos\varphi\,[4dx(x^2 + y^2) + 2fxz^2] + \\ + \sin\theta\sin\varphi\,[4dy(x^2 + y^2) + 2fyz^2] + \\ + \cos\theta\,[4ez^3 + 2fz(x^2 + y^2)],$$

(15) $$\gamma = \sin^2\theta\cos^2\varphi\,[2d(3x^2 + y^2) + fz^2] + \\ + \sin^2\theta\sin^2\varphi\,[2d(x^2 + 3y^2) + fz^2] + \\ + \cos^2\theta\,[6ez^2 + f(x^2 + y^2)] + 8dxy\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + \\ + 4fxz\sin\theta\cos\theta\cos\varphi + 4fyz\sin\theta\cos\theta\sin\varphi,$$

$$\delta = 2\sin\theta\,(2d\sin^2\theta + f\cos^2\theta)(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + \\ + 2z\cos\theta\,(2e\cos^2\theta + f\sin^2\theta),$$

$$\varepsilon = d\sin^4\theta + e\cos^4\theta + f\sin^2\theta\cos^2\theta.$$

Заметим, что α, β, γ, δ, ε являются малыми первого порядка по отношению к коэффициентам d, e, f. Так как по условию последние достаточно малы по абсолютной величине, то искомая поверхность вращающейся жидкости является выпуклой, так же, как и поверхность эллипсоида вращения, получающаяся из первой, полагая $d = e = f = 0$. Поэтому уравнение (14) должно дать для r два вещественных значения: одно положительное и другое отрицательное, близкие к корням r_1 и r_2 уравнения

(16) $$A + Br + Cr^2 = 0.$$

Характер остальных корней уравнения (14) для нас безразличен.

Имеем

(17) $$r_1 = \frac{-B + R}{2C}, \quad r_2 = \frac{-B - R}{2C},$$

где

(18) $$R = \sqrt{B^2 - 4AC}.$$

В последнем равенстве взято арифметическое значение корня. Корни уравнения (14) будут соответственно

(19) $$r_1' = r_1 + \Delta r_1, \quad r_2' = r_2 + \Delta r_2.$$

В разложениях для Δr_1 и Δr_2 удерживаем только члены, содержащие первые степени малых величин α, β, γ, δ, ε

$$\Delta r_1 = -\frac{1}{R}(\alpha + \beta r_1 + \gamma r_1^2 + \delta r_1^3 + \varepsilon r_1^4),$$
(20)
$$\Delta r_2 = \frac{1}{R}(\alpha + \beta r_2 + \gamma r_2^2 + \delta r_2^3 + \varepsilon r_2^4).$$

Производим в выражении (10) для X интегрирование по переменному r и результат представляем, следуя Лапласу,[1] в следующей форме:

(21) $$X = k\rho \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi (r_1' + r_2')\, d\varphi.$$

Находим, пользуясь равенствами (17), (18), (19), (20), сумму корней

(22) $$r_1' + r_2' = -\frac{B+\beta}{C} + \frac{\gamma B}{C^2} - \frac{\delta(B^2 - AC)}{C^3} + \frac{\varepsilon B(B^2 - 2AC)}{C^4},$$

где A, B, C, β, γ, δ, ε вычисляются по формулам (15). Подставляем найденное значение суммы корней в интеграл (21) и производим два последних интегрирования по θ и φ, чрезвычайно упрощающиеся благодаря отсутствию в этой сумме радикала R. Все выполняемые квадратуры элементарны. После довольно продолжительных выкладок получаем следующий простой результат

(23)
$$\begin{aligned} X = \frac{\pi k\rho x}{2\lambda^7(1+\lambda^2)} \Big\{ & 4\lambda^4(1+\lambda^2)[\lambda - (1+\lambda^2)\operatorname{arctg}\lambda] + \\ & + \frac{ad}{b^2}(1+\lambda^2)^2[-\lambda(15+\lambda^2) + (15 + 6\lambda^2 - \lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda] + \\ & + \frac{ae}{b^2}[-\lambda(15+13\lambda^2) + 3(1+\lambda^2)(5+\lambda^2)\operatorname{arctg}\lambda] + \\ & + \frac{af}{b^2}(1+\lambda^2)[\lambda(15+7\lambda^2) - (15+12\lambda^2+\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda]\Big\} + \\ & + \frac{\pi k\rho}{8\lambda^9}x(x^2+y^2)[5\lambda(21+11\lambda^2) - \\ & - 3(35+30\lambda^2+3\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda]\left[\frac{d}{b}(1+\lambda^2)^2 + \frac{e}{b} - \frac{f}{b}(1+\lambda^2)\right] - \\ & - \frac{\pi k\rho}{2\lambda^9}xz^2[5\lambda(21+11\lambda^2) - \\ & - 3(35+30\lambda^2+3\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda]\left[\frac{d}{b}(1+\lambda^2)^2 + \frac{e}{b} - \frac{f}{b}(1+\lambda^2)\right], \end{aligned}$$

[1] Ueber die Anziehung homogener Ellipsoide. Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften, № 19, SS. 3—23.

где

$$\lambda^2 = \frac{c - b}{b}. \tag{24}$$

Выражение для Y получается из предыдущего равенства перестановкой букв x и y. Что касается выражения для Z, то, составляя последнее, мы выпишем лишь члены, содержащие множителями z и z^3. Получим

$$\begin{aligned} Z = \frac{\pi k \rho z}{\lambda^7 (1 + \lambda^2)} \Big\{ & 4\lambda^4 (1 + \lambda^2)^2 (-\lambda + \operatorname{arctg} \lambda) - \\ & - \frac{ad}{b^2} (1 + \lambda^2)^2 [-\lambda (15 + \lambda^2) + (15 + 6\lambda^2 - \lambda^4) \operatorname{arctg} \lambda] - \\ & - \frac{ae}{b^2} [-\lambda (15 + 13\lambda^2) + 3 (1 + \lambda^2)(5 + \lambda^2) \operatorname{arctg} \lambda] - \\ & - \frac{af}{b^2} (1 + \lambda^2) [\lambda (15 + 7\lambda^2) - (15 + 12\lambda^2 + \lambda^4) \operatorname{arctg} \lambda] \Big\} + \\ & + \frac{\pi k \rho z^3}{3\lambda^9} [5\lambda (21 + 11\lambda^2) - 3 (35 + 30\lambda^2 + 3\lambda^4) \operatorname{arctg} \lambda] \Big[\frac{d}{b} (1 + \lambda^2)^2 + \\ & + \frac{e}{b} - \frac{f}{b} (1 + \lambda^2) \Big] + \ldots \end{aligned} \tag{25}$$

Потенциал U сил притяжения, действующих со стороны жидкости на точку $M(x, y, z)$ с массой, равной единице, определяется уравнением

$$dU = X dx + Y dy + Z dz. \tag{26}$$

Из выражений для X, Y, Z вытекает, что U является целой рациональной функцией четвертой степени от координат точки M вида

$$U = G (x^2 + y^2) + H z^2 + I (x^2 + y^2)^2 + K z^4 + L z^2 (x^2 + y^2) + \text{const}, \tag{27}$$

где коэффициенты G, H, I, K, L вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} G = \frac{\pi k \rho}{4\lambda^7 (1 + \lambda^2)} \Big\{ & 4\lambda^4 (1 + \lambda^2) [\lambda - (1 + \lambda^2) \operatorname{arctg} \lambda] + \\ & + \frac{ad}{b^2} (1 + \lambda^2)^2 [-\lambda (15 + \lambda^2) + (15 + 6\lambda^2 - \lambda^4) \operatorname{arctg} \lambda] + \\ & + \frac{ae}{b^2} [-\lambda (15 + 13\lambda^2) + 3 (1 + \lambda^2)(5 + \lambda^2) \operatorname{arctg} \lambda] + \\ & + \frac{af}{b^2} (1 + \lambda^2) [\lambda (15 + 7\lambda^2) - (15 + 12\lambda^2 + \lambda^4) \operatorname{arctg} \lambda] \Big\}, \end{aligned} \tag{28}$$

$$H=\frac{\pi k\rho}{2\lambda^7(1+\lambda^2)}\Big\{4\lambda^4(1+\lambda^2)^2(-\lambda+\operatorname{arctg}\lambda)-$$

$$-\frac{ad}{b^2}(1+\lambda^2)^2[-\lambda(15+\lambda^2)+(15+6\lambda^2-\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda]-$$

$$-\frac{ae}{b^2}[-\lambda(15+13\lambda^2)+3(1+\lambda^2)(5+\lambda^2)\operatorname{arctg}\lambda]-$$

$$-\frac{af}{b^2}(1+\lambda^2)[\lambda(15+7\lambda^2)-(15+12\lambda^2+\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda]\Big\},$$

(28)

$$I=\frac{\pi k\rho}{32\lambda^9}[5\lambda(21+11\lambda^2)-$$

$$-3(35+30\lambda^2+3\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda]\left[\frac{d}{b}(1+\lambda^2)^2+\frac{e}{b}-\frac{f}{b}(1+\lambda^2)\right],$$

$$K=\frac{\pi k\rho}{12\lambda^9}[5\lambda(21+11\lambda^2)-$$

$$-3(35+30\lambda^2+3\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda]\left[\frac{d}{b}(1+\lambda^2)^2+\frac{e}{b}-\frac{f}{b}(1+\lambda^2)\right],$$

$$L=-\frac{\pi k\rho}{4\lambda^9}[5\lambda(21+11\lambda^2)-$$

$$-3(35+30\lambda^2+3\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda]\left[\frac{d}{b}(1+\lambda^2)^2+\frac{e}{b}-\frac{f}{b}(1+\lambda^2)\right].$$

Для проверки вычислений подставляем значение U в уравнение Пуассона

(29) $$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=-4\pi k\rho$$

и убеждаемся, что оно удовлетворяется тождественно. Обозначим через ω угловую скорость вращающейся жидкой массы. Тогда потенциал U' центробежной силы точки M будет равен

(30) $$U'=\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)+\text{const}.$$

Поэтому

(31) $$U+U'=\left(G+\frac{\omega^2}{2}\right)(x^2+y^2)+Hz^2+I(x^2+y^2)^2+$$
$$+Kz^4+Lz^2(x^2+y^2)+\text{const}.$$

Но известно,[1] что уравнение

$$U + U' = \text{const.} \tag{32}$$

дает поверхность равного давления и, следовательно, при некотором значении входящей в него произвольной постоянной должно совпадать с уравнением (2) свободной поверхности вращающейся жидкости. Отсюда вытекает следующая система уравнений

$$\frac{G + \frac{\omega^2}{2}}{b} = \frac{H}{c} = \frac{I}{d} = \frac{K}{e} = \frac{L}{f}. \tag{33}$$

Подставляем из уравнений (28) значения коэффициентов G, H, I, K, L, сохраняя в выражениях для G и H только слагаемые, не содержащие малых множителей $\frac{ad}{b^2}$, $\frac{ae}{b^2}$, $\frac{af}{b^2}$. Тогда уравнения (33) примут вид

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b}\left\{\omega^2 + \frac{2\pi k\rho}{\lambda^3}\left[\lambda - (1+\lambda^2)\operatorname{arctg}\lambda\right]\right\} = \\
&= \frac{4\pi k\rho}{c\lambda^3}(1+\lambda^2)(-\lambda + \operatorname{arctg}\lambda) = \\
&= \frac{\pi k\rho}{16 d\lambda^9}\left[5\lambda(21 + 11\lambda^2) - \right. \\
&\left. - 3(35 + 30\lambda^2 + 3\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda\right]\left[\frac{d}{b}(1+\lambda^2)^2 + \frac{e}{b} - \frac{f}{b}(1+\lambda^2)\right] = \\
&= \frac{\pi k\rho}{6 e\lambda^9}\left[5\lambda(21 + 11\lambda^2) - \right. \\
&\left. - 3(35 + 30\lambda^2 + 3\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda\right]\left[\frac{d}{b}(1+\lambda^2)^2 + \frac{e}{b} - \frac{f}{b}(1+\lambda^2)\right] = \\
&= -\frac{\pi k\rho}{2 f\lambda^9}\left[5\lambda(21 + 11\lambda^2) - \right. \\
&\left. - 3(35 + 30\lambda^2 + 3\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda\right]\left[\frac{d}{b}(1+\lambda^2)^2 + \frac{e}{b} - \frac{f}{b}(1+\lambda^2)\right].
\end{aligned} \tag{34}$$

Уравнения (34) допускают очевидное решение $d = e = f = 0$, которое нас возвращает к эллипсоидам Маклорена или, быть может, заставляет при-

[1] Appell. Traité de Mécanique rationnelle, 1921, t. IV, p. 46; Tisserand. Traité de Mécanique céleste, t. II, p. 81.

нять во внимание в уравнении (2) группу членов, образующих целый однородный полином шестой степени. Считая, что коэффициенты d, e, f не равны нулю одновременно и имея в виду, что ни один из множителей произведения

$$[5\lambda(21+11\lambda^2)-$$
$$-3(35+30\lambda^2+3\lambda^4)\operatorname{arctg}\lambda]\left[\frac{d}{b}(1+\lambda^2)^2+\frac{e}{b}-\frac{f}{b}(1+\lambda^2)\right],$$

как это следует из дальнейшего, не равен нулю, получаем следующее решение

$$8d=3e=-f. \tag{35}$$

Остающиеся два уравнения из системы (34) напишутся в следующей форме

$$\begin{gathered}\frac{\omega^2}{2\pi k\rho}=\frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\operatorname{arctg}\lambda-\frac{3}{\lambda^2},\\ 5\lambda(21+11\lambda^2)(35+30\lambda^2+3\lambda^4)+\\ +192\lambda^7-3[(35+30\lambda^2+3\lambda^4)^2+64\lambda^6]\operatorname{arctg}\lambda=0.\end{gathered} \tag{36}$$

Первое из них хорошо известно в теории эллипсоидов Маклорена. Второе показывает, что не для всякого эллипсоида Маклорена существует близкая к нему фигура равновесия вращающейся жидкости, уравнение поверхности которой можно представить в форме (2). Эллипсоид, обладающий этим свойством, будем называть, следуя Пуанкарэ, эллипсоидом бифуркации. Для него должно удовлетворяться второе из уравнений (36). Покажем, что существует пара вещественных корней $\pm\lambda_0$ этого уравнения, равных по абсолютной величине и противоположных по знакам. Действительно при значении λ, удовлетворяющем неравенству $|\lambda|<1$, левая часть уравнения разлагается в бесконечный ряд

$$30\lambda^5-10\lambda^7+\ldots=0 \tag{37}$$

и при малых положительных значениях λ будет, несомненно, положительна. С другой стороны, если значение λ, предполагаемого положительным, велико, левая часть нашего уравнения, как это следует из рассмотрения порядка его членов, отрицательна. Так как левая часть рассматриваемого

уравнения является нечетной функцией λ, то отсюда вытекает существование вышеупомянутой пары корней, а значит и эллипсоида бифуркации. Вследствие того, что подстановка в левую часть нашего уравнения $\lambda = 1$ дает положительный результат, эта пара корней удовлетворяет неравенству $\lambda_0 > 1$. Пользуясь равенствами (35), представляем уравнение (2) поверхности вращающейся жидкости в виде

$$a = b(x^2 + y^2) + cz^2 - \frac{f}{24}[3(x^2 + y^2)^2 + 8z^4 - 24z^2(x^2 + y^2)]. \tag{38}$$

Гармонический полином, стоящий в прямых скобках предыдущего равенства, может быть преобразован при помощи формул перехода к сферическим координатам

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = r\cos\theta \tag{39}$$

и дальнейшей подстановки

$$t = \cos\theta. \tag{40}$$

Именно он выражается через полином Лежандра X_4

$$X_4 = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3) \tag{41}$$

следующим образом

$$3(x^2 + y^2)^2 + 8z^4 - 24z^2(x^2 + y^2) = 8r^4 X_4. \tag{42}$$

Таким образом уравнение (38) после перехода к сферическим координатам принимает вид

$$a = r^2(b\sin^2\theta + c\cos^2\theta) - \frac{f}{3}r^4 X_4. \tag{43}$$

Если полученное уравнение сравнить с уравнением эллипсоида Маклорена, то мы видим, что имеет место наличие дополнительного члена, выражающегося через зональные сферические функции.

Представляет интерес выяснить взаимное расположение полученной нами алгебраической поверхности четвертого порядка и соответствующего ей эллипсоида Маклорена. Поставим себе сначала задачу отыскать параллели, по которым новая поверхность пересекается с этим эллипсоидом. Оче-

видно задача сводится к нахождению корней полинома Лежандра X_4. Без труда получаем

$$\tag{44} \begin{gathered} \operatorname{tg}\theta_1 = -\operatorname{tg}\theta_2 = 2\sqrt{1-\sqrt{\frac{5}{6}}}, \\ \operatorname{tg}\theta_3 = -\operatorname{tg}\theta_4 = 2\sqrt{1+\sqrt{\frac{5}{6}}}. \end{gathered}$$

Каждая из двух полученных пар параллелей симметрично расположена по отношению к координатной плоскости XOY. При этом параллели, характеризуемые углами θ_1 и θ_2, более удалены от упомянутой плоскости, чем параллели, соответствующие углам θ_3 и θ_4. Легко, кроме того, установить, что при $f > 0$ новая поверхность расположена у полюса и экватора снаружи соответствующего ей эллипсоида Маклорена и, наоборот, внутри эллипсоида между параллелями, характеризуемыми углами θ_1 и θ_3, а также θ_2 и θ_4. При $f < 0$ происходит обратное.

Среди проблем, связанных с содержанием настоящего исследования, отметим несколько, разрешение которых представляет известный интерес. Так, изложенный метод можно применить для розыскания яйцеобразных фигур равновесия вращающейся жидкой массы, соответствующих уравнению типа (2), которое в этом случае нужно дополнить членами, содержащими нечетные степени ζ. Наконец, можно перейти к фигурам равновесия, соседним с эллипсоидами Якоби, устранив в уравнении (2) симметрию переменных ξ и η. В этом случае будут иметь место эллиптические квадратуры.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles | Отделение математических и естественных наук

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ, СОВЕРШАЮЩЕЙ КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Л. В. КАНТОРОВИЧА

(*Представлено академиком* А. Н. Крыловым)

Известно, какую большую роль играет задача о конформном отображении в гидродинамике, теории упругости, вопросах теплопроводности и электрического поля. Это вызвано тем, что метод конформного отображения является удобным методом для решения уравнений Лапласа $\Delta u = 0$ и бигармонического $\Delta\Delta u = 0$, являющихся фундаментальными для этих вопросов. В ряде важных случаев аналитическая функция, дающая конформное отображение, может быть выражена через элементарные и эллиптические функции. Наконец, для всех многоугольников вопрос решается (теоретически) с помощью формулы Кристофеля-Шварца, хотя фактическое определение постоянных в ней представляет большие трудности. В настоящей заметке мы хотим указать некоторые общие методы для нахождения функции, совершающей отображение. Эти методы основаны на том известном факте, что задача конформного отображения единичного круга на область, ограниченную спрямляемым контуром C, равносильна задаче нахождения такого параметрического представления этого контура, что x и y представляют сопряженные функции, т. е. даются тригонометрическими рядами вида

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt); \\ y &= -b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-b_n \cos nt + a_n \sin nt). \end{aligned}$$

Действительно, если контур C представлен в виде (1), то в комплексной форме это представление примет вид

$$w = x + iy = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{nit}, \tag{2}$$

а потому функция, совершающая конформное отображение, будет очевидно

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - ib_n) z^n. \tag{3}$$

Наоборот, если известна функция (3), совершающая конформное отображенне, то, идя обратным путем, можем притти к параметрическому представлению (1). Для прямого нахождения этого параметрического представления (1) можно применить два метода: метод бесконечных систем уравнений и метод последовательных приближений. Первый метод может быть полезен в некоторых случаях для фактического решения задачи, но трудности иследования получающихся бесконечных систем заставляют отдать предпочтение второму методу. Здесь мы рассмотрим оба метода.

1. Метод бесконечных систем

К бесконечной системе уравнений в случае, когда кривая задана уравнением в неявной форме

$$F(x, y) = 0, \tag{4}$$

можно притти, если искать представление кривой в виде (1). Именно, подставляя ряды (1) вместо x и y в (4) и разлагая полученное выражение по cos и sin кратных дуг, найдем

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} [F_n(a_j, b_j) \cos nt + F_n^*(a_j, b_j) \sin nt] = 0. \tag{5}$$

Отсюда, приравнивая нулю коэффицисны при $\cos nt$ и $\sin nt$, получаем бесконечную систему уравнений относительно коэффициентов a_j и b_j

$$F_n(a_j, b_j) = 0 \quad [n = 0, 1, 2, \ldots]; \quad F_n^*(a_j, b_j) = 0 \quad [n = 1, 2, \ldots]. \tag{6}$$

К этой же системе уравнений можно притти, беря уравнение кривой (4) в комплексной форме

(7) $$F\left(\frac{w+\bar{w}}{2}, \quad \frac{w-\bar{w}}{2i}\right)=0,$$ [1]

подставляя сюда w из (2), разлагая по степеням e^{it} и приравнивая нулю коэффициенты при всех положительных и отрицательных степенях e^{it}. Нахождение одной системы решений, для которой все ряды будут сходиться, достаточно для построения отображающей функции.

Например для эллипса $x^2+y^2-\lambda(x^2-y^2)=1$ или в комплексной форме $w\bar{w}-\frac{\lambda}{2}(w^2+\bar{w}^2)=1$ получаем систему (6) в виде

$$a_1^2+a_3^2+a_5^2+\ldots=1$$
$$a_1a_3+a_3a_5+a_5a_7+\ldots-\frac{\lambda}{2}a_1^2=0$$
$$a_1a_5+a_3a_7+a_5a_9+\ldots-\frac{\lambda}{2}(2a_1a_3)=0$$
$$a_1a_7+a_3a_9+a_5a_{11}+\ldots-\frac{\lambda}{2}(2a_1a_5+a_3^2)=0$$
. . . .
. . . .

При этом все коэффициенты, кроме $a_1, a_3, a_5, \ldots$, равны нулю, как это ясно из соображений симметрии, в предположении, что мы ищем отображающую функцию, удовлетворяющую условиям $f(0)=0$; $f'(0)$ полож. Система эта может вообще решаться по методу последовательных приближений и дает для отображающей функции, если отбросить члены порядка выше λ^4, значение

$$w=\left(1-\frac{\lambda^2}{8}+\frac{3\lambda^4}{128}\right)z+\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{5}{16}\lambda^3\right)z^3+\left(\frac{\lambda^2}{2}-\frac{5}{8}\lambda^4\right)z^5+\frac{5}{8}\lambda^3z^7+\frac{7}{8}\lambda^4z^9.$$

2. Метод последовательных приближений для кривых, заданных неявным уравнением

Пусть нам требуется отобразить единичный круг на односвязную область, ограниченную кривой

(8) $$F(x, y, \lambda)=0,$$

[1] $\bar{w}$ обозначает комплексное число, сопряженное с w.

где λ параметр. При $\lambda = 0$ эта кривая вырождается в кривую

$$F(x, y, 0) = F_0(x, y) = 0. \tag{9}$$

Относительно кривой (9) будем предполагать, что она не имеет особых точек и для нее отображающая функция известна и тем самым известно ее параметрическое представление с помощью двух сопряженных функций

$$x = x_0(t); \; y = y_0(t); \; y_0(t) = \widetilde{x_0(t)}.\text{[1]} \tag{10}$$

Относительно функции $F(x, y, \lambda)$ сделаем предположение о том, что она имеет аналитический характер, именно, что она разлагается в ряд Тэйлора вокруг каждой системы значений $x = x_1$; $y = y_1$; $\lambda = 0$, если точка (x_1, y_1) лежит на кривой (9).

Будем искать теперь параметрическое представление кривой (9) с помощью сопряженных функций в виде

$$\begin{gathered} x(t) = x_0(t) + \lambda x_1(t) + \ldots + \lambda^n x_n(t) + \ldots; \\ y(t) = y_0(t) + \lambda y_1(t) + \ldots + \lambda^n y_n(t) + \ldots \\ y_i(t) = \widetilde{x_i(t)} \qquad [i = 0, 1, 2, \ldots]. \end{gathered} \tag{11}$$

Функции $x_0(t)$ и $y_0(t)$ согласно сделанному выше предположению нам известны [см. (10)]; для отыскания же $x_n(t)$ и $y_n(t)$ подставим ряды (11) в уравнение кривой (8) и приравняем нулю множитель при λ^n; получим тогда уравнение

$$\begin{gathered} F'_x(x_0, y_0, 0)\, x_n + F'_y(x_0, y_0, 0) \cdot y_n + \\ + \frac{1}{n!}\left[\frac{d}{d\lambda^n} F(x_0 + \lambda x_1 + \ldots + \lambda^{n-1} x_{n-1}, \; y_0 + \lambda y_1 + \ldots + \lambda^{n-1} y_{n-1})\right]_{\lambda=0} = 0 \end{gathered} \tag{12}$$

или, обозначая последний член правой части (12) через T_n, можем (12) переписать в виде

$$F'_x(x_0, y_0, 0)\, x_n + F'_y(x_0, y_0, 0) \cdot y_n = -T_n. \tag{13}$$

[1] Через $\widetilde{\varphi(t)}$ мы обозначаем функцию, сопряженную с функцией $\varphi(t)$, см. (1).

Наконец, пользуясь тем, что уравнения (10) выражают кривую (9), имеем

(14) $$F(x_0(t), y_0(t), 0) = 0; \quad F'_x(x_0, y_0, 0)x_0' + F'_y(x_0, y_0, 0)y_0' = 0,$$

благодаря чему можем уравнение (13) переписать в виде:

$$y_0' x_n - x_0' y_n = -\frac{T_n y_0}{F'_x(x_0, y_0, 0)}.$$

Обозначая далее правую часть через S_n и присоединяя к этому уравнению сопряженное с ним, получаем систему уравнений

(15) $$\begin{gathered} y_0' x_n - x_0' y_n = S_n \\ x_0' x_n + y_0' y_n = \widetilde{S_n}, \end{gathered}$$

откуда найдем

(16) $$x_n = \frac{S_n \cdot y_0' + \widetilde{S_n} x_0'}{x_0'^2 + y_0'^2}; \quad y_n = \frac{-S_n x_0' + \widetilde{S_n} \cdot y_0'}{x_0'^2 + y_0'^2}.$$

Эти формулы упрощаются в случае, когда кривая (9) есть круг. В этом случае имеем $F_0(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $x_0 = \cos t$; $y_0 = \sin t$, откуда

(16') $$x_n = -\frac{T_n \cos t - \widetilde{T_n} \sin t}{2}; \quad y_n = -\frac{T_n \sin t + \widetilde{T_n} \cos t}{2}.$$

При таком определении функций x_n и y_n и при сделанных выше и при некоторых дополнительных предположениях относительно кривой (9) можно доказать абсолютную и равномерную сходимость рядов (11) для λ достаточно малых, а также, что функция комплексного переменного, которая может быть построена с помощью рядов (11), есть искомая отображающая функция.

3. Метод последовательных приближений для кривых, заданных в параметрической форме

Предположим теперь, что уравнение кривой задано в параметрической форме в комплексном виде

(17) $$w = f(e^{i\theta}, \lambda) + f_1(e^{-i\theta}, \lambda),$$

причем предположим, что функции $f(z, \lambda)$ и $f_1(z, \lambda)$ имеют аналитический характер для значений $|z|$, близких к 1, и λ, близких к 0, и предположим далее, что для $\lambda = 0$ w выражение не содержит отрицательных степеней $e^{i\theta}$, т. е.

$$f_1(e^{-i\theta}, 0) = 0. \tag{18}$$

Относительно кривой

$$w = f(e^{i\theta}, 0) \tag{19}$$

предполагаем, что она не имеет кратных и особых точек.

Для отыскания отображающей функции мы должны представить кривую (17) в таком виде, чтобы в правую часть входили только положительные степени $e^{i\theta}$. Этого можно добиться, вводя новый параметр t, полагая

$$\theta = t + \lambda\varphi_1(t) + \ldots + \lambda^n \varphi_n(t) + \ldots, \tag{20}$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ... вещественные функции, которые могут быть определены рекурентно. Именно, подставляя в (17) вместо θ ряд (20) и требуя, чтобы множитель при λ^n

$$\begin{gathered} f'_z(e^{it}, 0)\, ie^{it} \varphi_n(t) + \\ + \frac{1}{n!}\left\{\frac{d}{d\lambda^n}\left[f(e^{i(t+\lambda\varphi_1+\ldots+\lambda^{n-1}\varphi_{n-1})}, \lambda) + f_1(e^{-i(t+\lambda\varphi_1+\ldots+\lambda^{n-1}\varphi_{n-1})}, \lambda)\right]\right\}_{\lambda=0} \end{gathered} \tag{21}$$

не содержал отрицательных степеней e^{it}, найдем, если последний член обозначим кратко через M_n, вещественную функцию $\varphi_n(t)$ в виде

$$\varphi_n(t) = 2R\left\{\frac{M_n \cdot ie^{-it}}{f'_z(e^{it}, 0)}\right\}_{e^{-it}}, \tag{22}$$

где знак e^{-it} внизу указывает, что мы должны сохранить в выражении в скобках только члены, содержащие e^{it} в отрицательных степенях.

Формула (22) получает особенно простой вид, когда кривая (19) есть окружность, т. е. $f(e^{i\theta}, 0) = e^{i\theta}$, именно в этом случае просто

$$\varphi_n(t) = i(M_n e^{-it} - \widetilde{M}_n e^{it}). \tag{22'}$$

И в случае параметрического представления может быть доказана сходимость ряда (20) при малых λ.

* * *

Заметим, что рассмотренный метод может быть использован и не при малых значениях λ, когда он неприложим непосредственно благодаря тому, что ряд (20) оказывается расходящимся или сходится медленно. Это использование может быть сделано двояко: либо, рассматривая θ как аналитическую функцию от λ, заданную вблизи $\lambda = 0$ рядом (20), можем продолжить ее аналитически; либо можем разбить переход от кривой (18) к кривой (17) на ряд переходов, вставляя (n—1) промежуточных кривых

$$w = f\left(e^{i\theta}, \frac{\lambda}{n}\right) + f_1\left(e^{-i\theta}, \frac{\lambda}{n}\right);$$

$$\ldots; \; w = f\left(e^{i\theta}, \frac{n-1}{n}\lambda\right) + f_1\left(e^{-i\theta}, \frac{n-1}{n}\lambda\right).$$

Последнее замечание может служить основанием и для построения графического способа решения задачи.

В качестве примера рассмотрим задачу о нахождении функции, дающей отображение единичного круга на кривую, заданную полярным уравнением

$$\rho = \rho_0 (1 + \lambda \cos n\theta).$$

Уравнение этой кривой в комплексной форме будет:

$$w = \rho_0 \left\{ e^{\theta i} + \lambda \left[\frac{1}{2} e^{(n+1)\theta i} + \frac{1}{2} e^{-(n-1)\theta i} \right] \right\}.$$

Отсюда, пользуясь формулами (21) и (22′), ограничиваясь членами с λ^2, найдем

$$\varphi_1(t) = ie^{-nti} - ie^{nti}; \; \varphi_2(t) = in\left[e^{-2nit} - e^{2nit}\right],$$

откуда

$$w = \left\{ e^{it} + \lambda e^{(n+1)it} + \lambda^2 \frac{n}{2} \left[e^{(2n+1)it} - e^{it}\right] \right\} \rho_0.$$

Таким образом, отображающая функция будет в данном случае

$$w = \left\{ z\left(1 - \frac{n}{2}\lambda^2\right) + \lambda z^{n+1} + \frac{n}{2}\lambda^2 z^{2n+1} \right\} \rho_0.$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

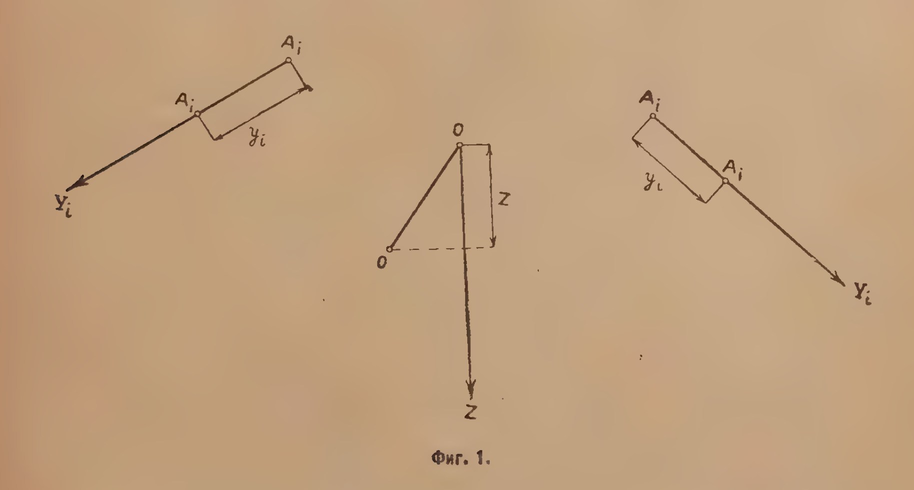
МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ПРИМЕНЕНИИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ. СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

В. И. НОВОТОРЦЕВА

(*Представлено* Сейсмологическим институтом)

В основу приближенных исследований всякого рода затухающих колебаний удобнее всего принять вид колебания, затухающего от действия сил сопротивления, пропорциональных скоростям перемещений.

Представим себе упругую систему, имеющую массы M_i, сосредоточенные в отдельных точках A_i (фиг. 1).



Фиг. 1.

При свободных колебаниях системы в точках A_i возникнут следующие силы:

1) силы инерции

$$Q_i = -\frac{d^2 y_i}{dt^2} M_i$$

2) силы сопротивления

$$\Omega_i = -\frac{dy_i}{dt} c_i,$$

где y_i — перемещения точек A_i,
c_i — коэффициент сопротивления.

В виду того, что силы сопротивления предполагаются пропорциональными скоростям перемещений, значения c_i от времени не зависят, но могут быть различными для различных точек A_i.

Выбирая произвольную точку системы O и обозначая через z проекцию перемещения точки O на произвольное направление OZ, имеем

$$z = -\Sigma \delta_i \left(\frac{d^2 y_i}{dt^2} M_i + \frac{dy_i}{dt} c_i \right), \tag{a}$$

где δ_i — коэффициент влияния, соответствующий перемещению y_i, т. е. перемещение точки O по направлению OZ от силы, равной единице, приложенной к точке A_i по направлению $A_i Y_i$.

Если кроме сосредоточенных масс и сосредоточенных сил сопротивления система имеет также сплошные массы и сплошные силы сопротивления, то

$$z = -\Sigma \delta_i \left(\frac{d^2 y_i}{dt^2} M_i + \frac{dy_i}{dt} c_i \right) - \int \delta \left(\frac{\partial^2 y}{dt^2} dM + \frac{dy}{dt} dc \right), \tag{1}$$

где dM — дифференциал сплошной массы в некоторой точке системы; dc — дифференциал коэффициента сопротивления, y — перемещение и δ — коэффициент влияния для той же точки.

Пользуясь формулой (a), можно составить для системы с сосредоточенными массами и сосредоточенными силами сопротивления соответствующие дифференциальные уравнения. Интегрируя эти уравнения, можно установить, что перемещение любой точки системы выразится суммою слагаемых вида

$$e^{-nt}[X' \cos(pt + \alpha) + X'' \sin(pt + \alpha)],$$

где X' и X'' независящие от времени функции координат точки. Из этого следует, что перемещение какой-либо точки системы, имеющей как сосредоточенные массы и силы сопротивления, так и сплошные, выразится суммою слагаемых такого же вида с тою только разницей, что число слагаемых будет бесконечно большим.

Каждое слагаемое вида

$$e^{-nt}[X'\cos(pt+\alpha)+X''\sin(pt+\alpha)]$$

определяет перемещения точек, соответствующие одному из нормальных видов колебания с одинаковыми для всех точек коэффициентом частоты p, коэффициентом затухания n и начальной фазой α.

Понимая в формуле (1) под y, y_i и z перемещения, соответствующие какому-либо нормальному виду колебаний, имеем, согласно принятым обозначениям

$$\begin{aligned} y &= e^{-nt}[X'\cos(pt+\alpha)+X''\sin(pt+\alpha)] \\ y_i &= e^{-nt}[X_i'\cos(pt+\alpha)+X_i''\sin(pt+\alpha)], \end{aligned} \tag{2}$$

где X_i' и X_i'' значения функций X' и X'' в точках A_i.

Подставляя (2) в (1), находим перемещение точки O, соответствующее одному из нормальных видов колебания:

$$\begin{aligned} z = e^{-nt}\Big\{\Big[&(p^2-n^2)(\Sigma\delta_i X_i' M_i+\int\delta X'\,dM)+ \\ &+2pn(\Sigma\delta_i X_i'' M_i+\int\delta X''\,dM)+n(\Sigma\delta_i X_i' c_i+\int\delta X'\,dc)- \\ &-p(\Sigma\delta_i X''_i c_i+\int\delta X''\,dc)\Big]\cos(pt+\alpha)+\Big[(p^2-n^2)(\Sigma\delta_i X_i'' M_i+ \\ &+\int\delta X''\,dM)-2pn(\Sigma\delta_i X_i' M_i+\int\delta X'\,dM)+n(\Sigma\delta_i X_i'' c_i+ \\ &+\int\delta X''\,dc)+p(\Sigma\delta_i X_i' c_i+\int\delta X'\,dc)\Big]\sin(pt+\alpha)\Big\}, \end{aligned} \tag{3}$$

Полагая

$$z = e^{-nt}[Z'\cos(pt+\alpha)+Z''\sin(pt+\alpha)], \tag{4}$$

где Z' и Z'' значения функций X' и X'' в точке O, и вводя обозначения

$$\begin{aligned} W' &= \Sigma\delta_i X_i' M_i+\int\delta X'\,dM \qquad W'' = \Sigma\delta_i X_i'' M_i+\int\delta X''\,dM \\ \mathfrak{W}' &= \Sigma\delta_i X_i' c_i+\int\delta X'\,dc \qquad \mathfrak{W}'' = \Sigma\delta_i X_i'' c_i+\int\delta X''\,dc, \end{aligned} \tag{5}$$

имеем на основании (3) и (4):

$$\begin{aligned} Z' &= (p^2-n^2)W'+2pn\,W''+n\mathfrak{W}'-p\mathfrak{W}'' \\ Z'' &= (p^2-n^2)W''-2pn\,W'+n\mathfrak{W}''+p\mathfrak{W}'. \end{aligned} \tag{6}$$

Уравнения (6) позволяют определить значения коэффициентов частоты p и затухания n, если известны функции X' и X''.

Вводя обозначения:

$$\gamma = \frac{W''}{W'} \quad \zeta' = \frac{\mathfrak{W}'}{W'} \quad \zeta'' = \frac{\mathfrak{W}''}{W''} \quad \eta' = \frac{Z'}{W'} \quad \eta'' = \frac{Z''}{W''}, \tag{7}$$

приводим уравнения (6) к более удобной для решения форме:

$$\eta = \frac{(\eta' - \eta'') + \left(\frac{\zeta'}{\gamma} + \gamma\xi''\right)p}{(\zeta' - \zeta'') + 2\left(\frac{1}{\gamma} + \gamma\right)p} \tag{8}$$

$$p^2 + \gamma(2n - \zeta'')p - (n^2 - n\zeta' + \eta') = 0.$$

Значение функций X' и X'' определяется путем последовательных приближений.

Пользуясь формулами (2), находим силы, возникающие при колебании:

1) силы инерции

сосредоточенные:

$$Q_i = -\frac{d^2 y_i}{dt^2} M_i = e^{-nt}\{[(p^2 - n^2)X_i' M_i + 2pnX_i'' M_i]\cos(pt + \alpha) +$$
$$+ [(p^2 - n^2)X_i'' M_i - 2pnX_i' M_i]\sin(pt + \alpha)\}$$

сплошные: (9)

$$dQ = -\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dM = e^{-nt}\{[(p^2 - n^2)X' dM + 2pnX'' dM]\cos(pt + \alpha) +$$
$$+ [(p^2 - n^2)X'' dM - 2pnX' dM]\sin(pt + \alpha)\}$$

2) силы сопротивления

сосредоточенные:

$$\mathfrak{Q}_i = -\frac{dy_i}{dt} c_i = e^{-nt}[(nX_i' c_i - pX_i'' c_i)\cos(pt + \alpha) + (nX_i'' c_i +$$
$$+ pX_i' c_i)\sin(pt + \alpha)]$$

сплошные: (10)

$$d\mathfrak{Q} = -\frac{\partial y}{\partial t} dc = e^{-nt}[(nX' dc - pX'' dc)\cos(pt + \alpha) + (nX'' dc +$$
$$+ pX' dc)\sin(pt + \alpha)].$$

Сравнивая формулы (9) и (10) с формулами (2), заключаем, что функция X' представляет собою уравнение деформации системы от системы сил:[1]

$$
\left.
\begin{aligned}
Q_i' &= (p^2 - n^2) X_i' M_i + 2pnX_i'' M_i \\
dQ' &= (p^2 - n^2) X' dM + 2pnX'' dM \\
\mathfrak{Q}_i' &= nX_i' c_i - pX_i'' c_i \\
d\mathfrak{Q}' &= nX' dc - pX'' dc;
\end{aligned}
\right\} \qquad (11')
$$

функция X'' — уравнение деформации от системы сил:

$$
\left.
\begin{aligned}
Q_i'' &= (p^2 - n^2) X_i'' M_i - 2pnX_i' M_i \\
dQ'' &= (p^2 - n^2) X'' dM - 2pnX' dM \\
\mathfrak{Q}_i'' &= nX_i'' c_i + pX_i' c_i \\
d\mathfrak{Q}'' &= nX'' dc + pX' dc.
\end{aligned}
\right\} \qquad (11'')
$$

Вводя нижеследующие определения

U' — уравнение деформации системы от сил $X_i' M_i$, $X' dM$
$\mathfrak{U}'$ — » » » » » $X_i' c_i$, $X' dc$
U'' — » » » » » $X'' M_i$, $X'' dM$
$\mathfrak{U}''$ — » » » » » $X''_i c_i$, $X'' dc$, (12)

заключаем, что W', W'', $\mathfrak{W}'$ и $\mathfrak{W}''$ представляют собою значения функций U', U'', $\mathfrak{U}'$ и $\mathfrak{U}''$ в точке O.

На основании изложенного устанавливается следующий ход расчета:

1) Задаются по тем или иным соображениям первые приближения функций X' и X'' — X_1' и X_1''.

2) Определяются первые приближения величин Z' и Z'' — Z_1' и Z_1'', как значения функций X_1' и X_1'' в точке O.

3) По значениям X_1' и X_1'' определяются первые приближения функций U', $\mathfrak{U}'$, U'' и $\mathfrak{U}''$ — U_1', $\mathfrak{U}_1'$, U_1'' и $\mathfrak{U}_1''$, как уравнения деформации согласно определениям (12).

[1] Под уравнением деформации понимается перемещение точки под действием некоторой системы сил, определяемое как функция координат точки; напр., уравнение упругой линии при изгибе и т. п.

4) Определяются первые приближения величин W', W'', $\mathfrak{W}'$ и $\mathfrak{W}''$ — W_1', W_1'', $\mathfrak{W}_1'$ и $\mathfrak{W}_1''$, как значения функций U_1', U_1'' $\mathfrak{U}_1'$ и $\mathfrak{U}_1''$ в точке O и затем по формулам (7) первые приближения коэффициентов γ, ζ', ζ'', η' и η''.

5) Из уравнений (8) определяются первые приближения коэффициента затухания n и коэффициента частоты p — n_1 и p_1.

Зная значения p_1 и n_1, можно по формулам (11′) и (11″) определить первые приближения сил инерции и сопротивления и затем вторые приближения функций X' и X'' — X_2' и X_2'', как уравнения деформации системы от этих сил.

Легко убедиться, что

$$\begin{aligned} X_2' &= (p_1^2 - n_1^2)\, U_1' + 2p_1 n_1\, U_1'' + n_1 \mathfrak{U}_1' - p_1 \mathfrak{U}_1'' \\ X_2'' &= (p_1^2 - n_1^2)\, U_1'' - 2p_1 n_1\, U_1' + n_1 \mathfrak{U}_1'' + p_1 \mathfrak{U}_1'. \end{aligned} \tag{13}$$

Изложенный ход расчета продолжается до тех пор, пока последовательные приближения p и n не будут мало отличаться друг от друга.

Для уменьшения числа последовательных приближений важно с самого начала задаться достаточно точными значениями функций X' и X''.

Для исследования вида этих функций рассмотрим частный случай, когда отношение коэффициента сопротивления к массе будет для всех точек системы величиною одинаковою:

$$\frac{c_i}{M_i} = k \qquad \frac{dc}{dM} = k \qquad k = \text{const.} \tag{14}$$

В таком случае из формул (5)

$$\mathfrak{W}' = kW' \qquad \mathfrak{W}'' = kW''.$$

Поэтому уравнения (6) примут вид

$$\begin{aligned} Z' &= (p^2 - n^2 + kn)\, W' + p\,(2n - k)\, W'' = 0 \\ Z'' &= (p^2 - n^2 + kn)\, W'' - p\,(2n - k)\, W' = 0. \end{aligned} \tag{6'}$$

Если положить $X'' = X'$, то $W'' = W'$ и $Z'' = Z'$, откуда на основании уравнений (6′)

$$\begin{aligned} Z' &= [(p^2 - n^2 + kn) + p\,(2n - k)]\, W' \\ Z' &= [(p^2 - n^2 + kn) - p\,(2n - k)]\, W'. \end{aligned} \tag{6''}$$

Из уравнений (6'') следует, что

$$n = \frac{1}{2} k$$

$$Z' = Z'' = (p^2 + n^2) W'$$

и на основании формул (5)

$$p^2 + n^2 = \frac{Z'}{\Sigma \delta_i X'_i M_i + \int \delta X' \, dM}. \qquad (15)$$

В статье автора «Метод последовательных приближений в применении к изучению свободных колебаний инженерных конструкций» (Тр. Сейсмол. инст. АН СССР, 1933 г., № 23) было показано, что уравнению (15) удовлетворяет вид функции X', соответствующий уравнению деформации системы при свободных незатухающих колебаниях.

При этом

$$\frac{Z'}{\Sigma \delta_i X_i' M_i + \int \delta X' \, dM} = p_0^2$$

где p_0 — коэффициент частоты одного из нормальных видов свободных незатухающих колебаний.

Отсюда

$$p = \sqrt{p_0^2 - n^2}.$$

Формула (2) при $X' = X'' = X$ примет вид

$$y = e^{-nt} X [\cos(pt + \alpha) + \sin(pt + \alpha)].$$

Изменяя соответственным образом начальную фазу α, получим для рассматриваемого частного случая

$$y = e^{-nt} X \cos(pt + \alpha)$$

где (16

$$n = \frac{1}{2} k \qquad p = \sqrt{p_0^2 - n^2}.$$

При этом функция X представляет собою уравнение деформации одного из нормальных видов свободных незатухающих колебаний; p_0 — коэффициент частоты, соответствующий этому виду колебаний.

В упомянутой статье автора были указаны формы функции X, дающие для основного вида поперечных колебаний различных систем очень точные результаты уже в первом приближении.

Заметим, между прочим, что формулы (16) одинаковы с общеизвестными формулами для затухающих колебаний системы с одной степенью свободы.

Если не существует условий (14), то уравнение колебаний уже не будет определяться формулами (16).

В таких случаях принимаем уравнение деформации, соответствующее не затухающим колебаниям, в качестве первого приближения функций X' и X''; полагаем также в первом приближении $X_1' = X_1''$.

В таком случае, на основании формул (5) и (7)

$$Z_1' = Z_1'' \quad W_1' = W_1'' \quad \mathfrak{W}_1' = \mathfrak{W}_1''$$

$$\gamma_1 = 1\ \zeta_1' = \zeta_1'' = \frac{\mathfrak{W}''}{W_1'} \quad \eta_1' = \eta_1'' = \frac{Z_1'}{W_1'}.$$

Из уравнений (8) первые приближения n и p будут

$$n_1 = \frac{\mathfrak{W}_1'}{2W_1'}$$
$$p_1^2 + n_1^2 = \frac{Z_1'}{W_1'}. \tag{17}$$

Так как функция X_1' представляет собою уравнение деформации, соответствующее не затухающим колебаниям, то

$$\frac{Z_1'}{W_1'} = p_0^2 \quad \text{и} \quad p_1^2 = \sqrt{p_0^2 - n^2}. \tag{17'}$$

При незначительных величинах коэффициента затухания, с которыми преимущественно и приходится встречаться на практике, влиянием затухания на форму функций X' и X'' можно пренебречь.

В таком случае

$$y = e^{-nt} X \cos(pt + \alpha)$$
$$n = \frac{\mathfrak{W}}{2W} \quad p_2 = \sqrt{p_0^2 - n^2}, \tag{18}$$

причем функция X представляет собою уравнение деформации, соответствующее не затухающим колебаниям.

Очевидно, что существенных отступлений от формул (18) можно ожидать лишь при больших величинах коэффициента затухания, и то только при значительных расхождениях с условиями (14).

Покажем на двух примерах, что формулами (18) можно пользоваться с достаточной степенью точности даже при высоких значениях коэффициента затухания и резких отступлениях от условий (14).

Пример 1.

Брус постоянного сечения с одним заделанным, а другим свободным концом (фиг. 2).

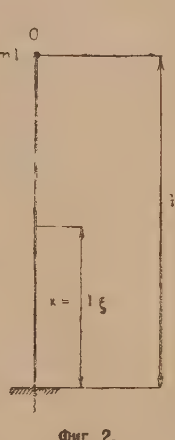
На свободном конце бруса имеется сосредоточенная масса ml. Сам брус рассматривается, как не имеющий вовсе массы.

Силы сопротивления — сплошные по всей длине бруса.

Коэффициент сопротивления на единицу длины бруса

$$\frac{dc}{dx} = 4\sqrt{\frac{mEI}{l^4}}.$$

Точку O выбираем на свободном конце бруса.



Фиг. 2.

Первое приближение

За первое приближение функций X' и X'' принимаем форму упругой линии от сосредоточенной силы, приложенной на свободном конце бруса.

$$X_1' = X_1'' = 3\xi^2 - \xi^3.$$

Форма эта в точности соответствует упругой линии при незатухающих колебаниях бруса.

$$Z'_1 = 2.$$

На основании определений (12) функция U_1' находится как упругая линия от сосредоточенной силы на конце бруса $Q = mlZ_1' = 2ml$:

$$U_1' = \frac{ml^4}{3EI}(3\xi^2 - \xi^3).$$

Функция $\mathfrak{U}_1'$ определяется, как упругая линия от сплошных сил,

$$d\mathfrak{Q}' = 4\sqrt{\frac{mEI}{l^4}}\,X_1'\,dx$$

из дифференциального уравнения

$$EI\frac{d^4 \mathfrak{U}_1'}{dx^4}=4\sqrt{\frac{mEI}{l^4}}(3\xi^2-\xi^3).$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\mathfrak{U}_1'=\sqrt{\frac{ml^4}{EI}}(1.100\xi^2-0.500\xi^3+0.033\xi^6-0.005\xi^7),$$

откуда

$$W_1'=\frac{2ml^4}{3EI}\qquad \mathfrak{W}_1'=0.628\sqrt{\frac{ml^4}{EI}}.$$

На основании формул (17) и (17') находим

$$p_0^2=\frac{Z_1'}{W_1'}=\frac{3EI}{ml^4}$$

$$n_1=\frac{\mathfrak{W}_1'}{2W_1'}=0,471\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

$$p_1=\sqrt{p_0^2-n_1^2}=1,667\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}.$$

Второе приближение

На основании формул (13)

$$X_2'=(p_1^2-n_1^2+2p_1n_1)U_1'+(n_1-p_1)\mathfrak{U}_1'$$

$$X_2''=(p_1^2-n_1^2-2p_1n_1)U_1'+(n_1+p_1)\mathfrak{U}_1',$$

откуда

$$X_2'=2.808\xi^2-0.777\xi^3-0.040\xi^6+0.006\xi^7$$

$$X_2''=3.333\xi^2-1.398\xi^3+0.071\xi^6-0.011\xi^7$$

$$Z_2'=1.997\qquad Z_2''=1.995,$$

далее

$$U_2'=\frac{1,997ml^4}{6EI}(3\xi^2-\xi^3)=\frac{ml^4}{EI}(0.999\xi^2-0.333\xi^3)$$

$$U_2''=\frac{1,995ml^4}{6EI}(3\xi^2-\xi^3)=\frac{ml^4}{EI}(0.998\xi^2-0.333\xi^3)$$

$$EI\frac{d^4\mathfrak{U}_2'}{dx^4}=4\sqrt{\frac{mEI}{l^4}}(2.808\xi^2-0.777\xi^3-0.040\xi^6+0.006\xi^7)$$

$$\mathfrak{U}_2'=\sqrt{\frac{ml^4}{EI}}(1.085\xi^2-0.491\xi^3+0.031\xi^6-0.004\xi^7)$$

$$EI\frac{d^4\mathfrak{U}_2''}{dx^4}=4\sqrt{\frac{mEI}{l^4}}(3.333\xi^2-1.398\xi^3+0.071\xi^6-0.011\xi^7)$$

$$\mathfrak{U}_2''=\sqrt{\frac{ml^4}{EI}}(1.123\xi^2-0.514\xi^3+0.037\xi^6-0.007\xi^7),$$

отсюда

$$W_2' = 0.666\frac{ml^4}{EI} \qquad W_2'' = 0.665\frac{ml^4}{EI}$$

$$\mathfrak{W}_2' = 0.621\sqrt{\frac{ml^4}{EI}} \qquad \mathfrak{W}_2'' = 0.639\sqrt{\frac{ml^4}{EI}}$$

$$\gamma_2 = \frac{W_2''}{W_2'} = 0.998 \qquad \frac{1}{\gamma_2} = 1.002$$

$$\zeta_2' = \frac{\mathfrak{W}_2'}{W_2'} = 0.932\sqrt{\frac{EI}{ml^4}} \qquad \zeta_2'' = \frac{\mathfrak{W}_2''}{W_2''} = 0.961\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

$$\eta_2' = \frac{Z_2'}{W_2'} = 3.000\frac{EI}{ml^4} \qquad \eta_2'' = \frac{Z_2''}{W_2''} = 3.000\frac{EI}{ml^4}.$$

Подставляя найденные значения величин в уравнения (8), находим

$$n_2 = \frac{1.893p_2\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}}{-0.029\sqrt{\frac{EI}{ml^4}} + 4.000p_2}$$

$$p_2^2 + \left(1.996n_2 - 0.959\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}\right)p_2 - \left(n_2^2 - 0.932n_2\sqrt{\frac{EI}{ml^4}} + 3.000\frac{EI}{ml^4}\right) = 0.$$

Решая эти уравнения путем пробных подстановок, определяем вторые приближения коэффициентов частоты и затухания

$$p_2 = 1.673\sqrt{\frac{EI}{ml^4}} \qquad n_2 = 0.475\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}.$$

Разница между первым и вторым приближениями составляет для p — 0.4%; для n — 0.8%, так что уже первое приближение дает очень точные результаты.

Уравнение колебаний бруса будет:

$$y = Ae^{-nt}[(2.808\xi^2 - 0.777\xi^3 - 0.040\xi^6 + 0.006\xi^7)\cos(pt + \alpha) +$$
$$+ (3.333\xi^2 - 1.398\xi^3 + 0.071\xi^6 - 0.011\xi^7)\sin(pt + \alpha)],$$

причем

$$p = 1{,}673\sqrt{\frac{EI}{ml^4}} \qquad n = 0{,}475\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}.$$

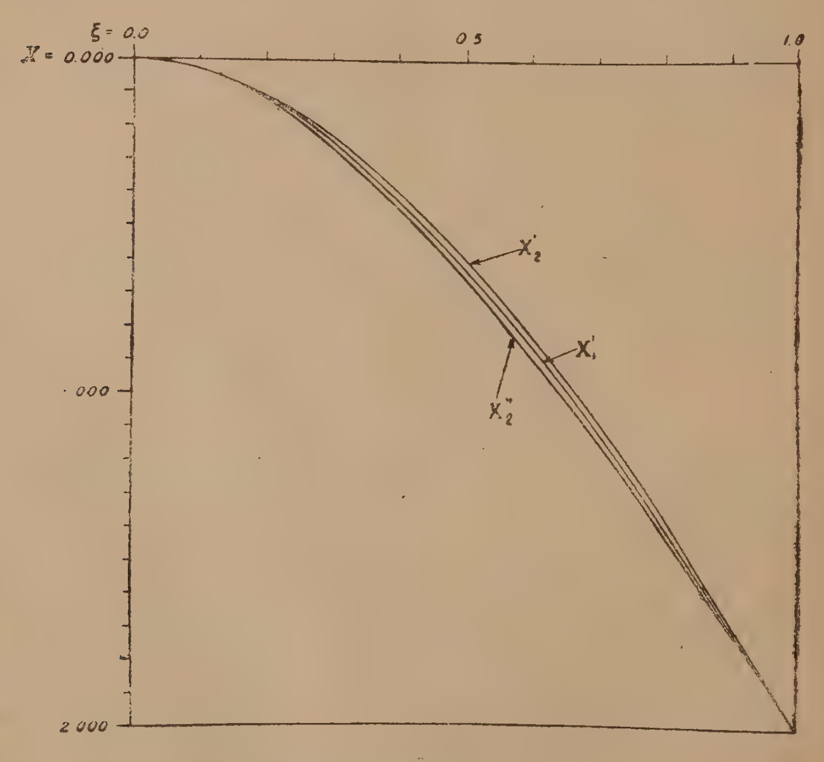
Вследствие незначительной разницы между первым и вторым приближением коэффициентов p и n следует ожидать, что функции X_2' и X_2'' будут мало отличаться от функции X_1'.

В нижеследующей таблице приведены значения функций X_1', X_2' и X_2''

Таблица 1

ξ	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
X_1'	0.00	0.029	0.112	0.416	0.864	1.408	2.000
X_2'	0.00	0.027	0.106	0.399	0.841	1.390	1.997
X_2''	0.00	0.032	0.122	0.444	0.901	1.434	1.995

Нанося эти значения на график, находим, что разница между ними очень небольшая (фиг. 3).



Фиг. 3. График значений X'_1, X'_2 и X''_2.

Поэтому с большой степенью точности можно положить

$$X_2' = X_2'' = X_1'$$

В таком случае уравнение колебания бруса будет:

$$y = Ae^{-nt}(3\xi^2 - \xi^3)\cos(pt + \alpha),$$

причем

$$p = 1{,}673\sqrt{\frac{EI}{ml^4}} \qquad n = 0{,}475\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}.$$

Таким образом для рассматриваемого случая применимы формулы (18).

Между тем, отступление от условий (14) очень резкое, так как для точки $O - \frac{c}{M} = 0$, а для всех остальных точек $\frac{dc}{dM} = \infty$.

Для того, чтобы судить о быстроте затухания, строим график колебания точки O на протяжении двух полных периодов.

Отношение коэффициента затухания к коэффициенту частоты

$$\frac{n}{p} = \frac{0{,}475}{1{,}673} = 0.284.$$

Соответствующим выбором значений A и α уравнение колебаний точки O может быть приведено к виду

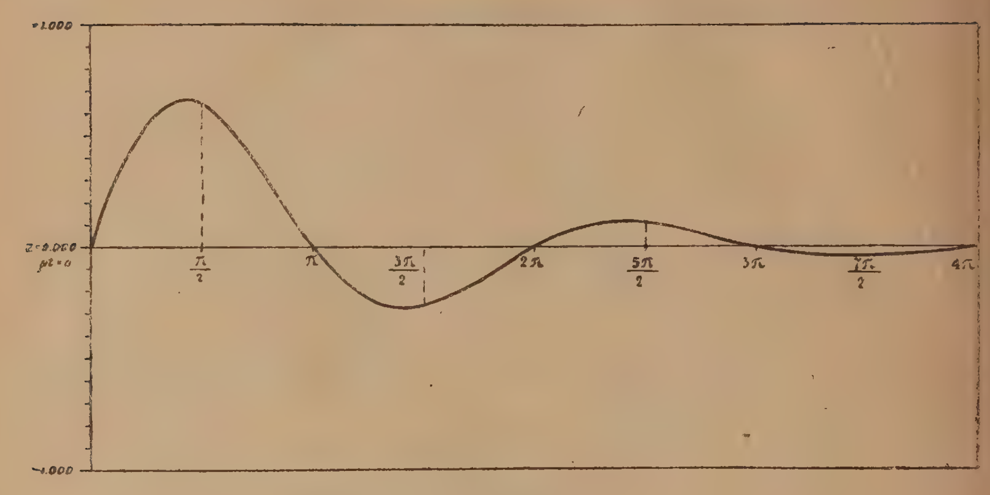
$$z = e^{-0.284pt}\sin pt.$$

В нижеследующей таблице приведены значения z, определенные по этой формуле в зависимости от pt.

Таблица 2

pt	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	—
z	0.000	+0.431	+0.643	+0.639	+0.477	+0.237	0.000	−0.176	−0.263	−0.261	−0.195	−0.097	—
pt	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{6}$	3π	$\frac{19\pi}{6}$	$\frac{10\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{23\pi}{6}$	4π
z	0.000	+0.072	+0.107	+0.107	+0.080	+0.040	0.000	−0.029	−0.044	−0.044	−0.033	−0.016	0.000

Нанося значения z на график, находим, что затухание колебаний очень быстрое (фиг. 4; см. след. стр.).



Фиг. 4. График колебания точки O.

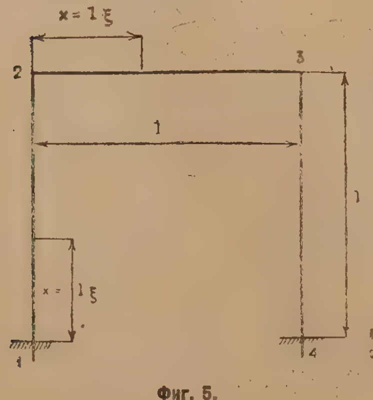
Пример 2.

Жесткая прямоугольная рама, постоянного сечения, заделанная в пятах. Высота рамы равна ее пролету (фиг. 5).

Силы сопротивления — сплошные по всей длине элементов рамы. Коэффициент сопротивления на единицу длины элемента рамы $\frac{dc}{dx} = 5\sqrt{\frac{mEI}{l^4}}$, где m — масса, приходящаяся на единицу длины элемента.

Исследуется первый вид колебания рамы.

Так как приемы построения упругих линий рамы достаточно подробно изложены в упомянутой выше статье автора, приводим только окончательные результаты.



Фиг. 5.

За первое приближение функций X' и X'' принимаем упругие линии элементов рамы от действия сосредоточенной силы, направленной по оси ригеля рамы:

Ригель 2—3.

$$X_1' = X_1'' = 0.6\xi - 1.8\xi^2 + 1.2\xi^3.$$

Стойка 1—2.

$$X_1' = X_1'' = 2.4\xi^2 - 1.4\xi^3.$$

Выбирая точку O в узле 2 рамы, имеем

$$Z_1' = 1.$$

Функции U_1' определятся как упругие линии от сосредоточенной силы $Q = ml$ и сплошных сил $dQ = mX_1'dx$:

Ригель 2—3

$$U_1' = \frac{ml^4}{EI}(0.0535\xi - 0.1599\xi^2 + 0.1049\xi^3 + 0.0050\xi^5 - 0.0050\xi^6 + 0.0014\xi^7).$$

Стойка 1—2

$$U_1' = \frac{ml^4}{EI}(0.2501\xi^2 - 0.1583\xi^3 + 0.0067\xi^6 - 0.0017\xi^7)$$

$$W_1' = 0.0968\frac{ml^4}{EI}.$$

Функции $\mathfrak{U}_1'$ определятся как упругие линии от сплошных сил

$$d\mathfrak{Q} = 5\sqrt{\frac{mEI}{l^4}}X_1'dx.$$

Ригель 2—3

$$\mathfrak{U}_1' = \sqrt{\frac{ml^4}{EI}}(0.0892\xi - 0.2638\xi^2 + 0.1675\xi^3 + 0.0250\xi^5 - 0.0250\xi^6 + 0.0071\xi^7).$$

Стойка 1—2

$$\mathfrak{U}_1' = \sqrt{\frac{ml^4}{EI}}(0.5362\xi^2 - 0.3751\xi^3 + 0.0333\xi^6 - 0.0083\xi^7)$$

$$\mathfrak{W}_1' = 0.1861\sqrt{\frac{ml^4}{EI}}$$

$$n_1 = \frac{\mathfrak{W}_1'}{2W_1'} = 0.961\sqrt{\frac{EI}{ml^4}} \qquad p_0^2 = \frac{Z_1'}{W_1'} = 10.33\frac{EI}{ml^4}$$

$$p_1 = \sqrt{p_0^2 - n_1^2} = 3.068\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}.$$

Второе приближение функций X' и X'' согласно формулам (13).

Ригель 2—3

$$X_2' = 0.582\xi - 1.745\xi^2 + 1.157\xi^3 + 0.019\xi^5 - 0.019\xi^6 + 0.005\xi^7$$

$$X_2'' = 0.498\xi - 1.477\xi^2 + 0.947\xi^3 + 0.114\xi^5 - 0.114\xi^6 + 0.032\xi^7$$

Стойка 1—2

$$X_2' = 2.469\xi^2 - 1.488\xi^3 + 0.026\xi^6 - 0.007\xi^7$$

$$X_2'' = 2.809\xi^2 - 1.922\xi^3 + 0.152\xi^6 - 0.038\xi^7.$$

В нижеследующих таблицах (3—4) приведены значения функций X_1', X_2' и X_2''.

Таблица 3

Ригель 2—3

ξ	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
X_1'	0.000	+0.058	+0.029	—0.029	—0.058	0.000
X_2'	0.000	+0.056	+0.028	—0.028	—0.056	0.000
X_2''	0.000	+0.048	+0.025	—0.025	—0.048	0.000

Таблица 4

Стойка 1—2

ξ	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
X_1'	0.000	+0.023	+0.085	+0.294	+0.562	+0.819	+1.000
X_2'	0.000	+0.023	+0.087	+0.300	+0.568	+0.824	+1.000
X_2''	0.000	+0.026	+0.097	+0.327	+0.602	+0.846	+1.001

Нанося эти значения на график, находим, что разница между ними не велика (фиг. 6).

Поэтому можно принять $X_1' = X_2'' = X_1'$

В таком случае уравнения колебания элементов рамы примут вид:

Ригель 2—3

$$y = Ae^{-nt}(0.6\xi - 1.8\xi^2 + 1.2\xi^3)\cos(pt + \alpha).$$

Стойка 1—2

$$y = Ae^{-nt}(2.4\xi^2 - 1.4\xi^3)\cos(pt + \alpha),$$

причем

$$n = 0.961\sqrt{\frac{EI}{ml^4}} \qquad p = 3.068\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}.$$

Так как по оси ригеля рамы действует сосредоточенная сила инерции $Q = ml$, а силы сопротивления имеются только сплошные, то для точки 2

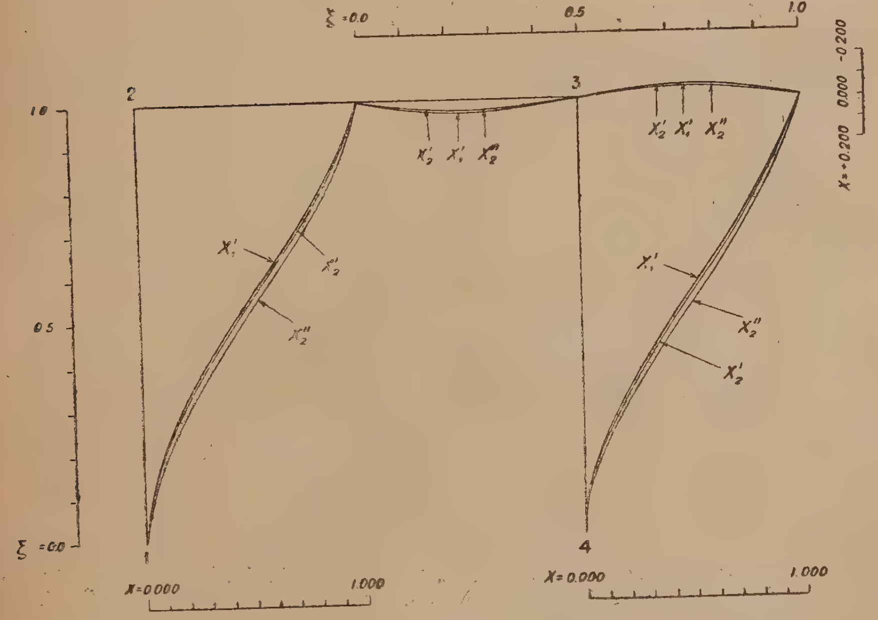
$$\frac{c}{M} = 0,$$

а для всех других точек ригеля и стоек

$$\frac{dc}{dM} = 5\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}.$$

Отношение

$$\frac{n}{p} = \frac{0.961}{3.068} = 0.311.$$



Фиг. 6. График значений X'_1, X'_2 и X''_2.

Следовательно и в этом случае имеется отступление от условий (14) при высоком значении коэфициента затухания.

Оба приведенных примера достаточно определенно выясняют незначительное влияние коэффициента затухания на форму упругой линии при колебаниях.

Из всего сказанного можно заключить, что для исследований затухающих колебаний при сопротивлении, пропорциональном скорости, сле-

дует, как правило, пользоваться формулами (18), и лишь в исключительных случаях при особо высоких значениях коэффициента затухания применять точный расчет, согласно изложенному методу.

Впрочем, подобные случаи вряд ли могут иметь место на практике.

Напомним также, что, как это было указано в упомянутой выше статье автора, метод последовательных приближений в изложенной форме применим для исследования только основного вида колебаний и в частных случаях для исследования двух видов колебаний.

Рассмотренный вид затухания определяется уравнением простейшего аналитического вида.

В действительности силы сопротивления при колебаниях изменяются не пропорционально скоростям перемещений, но по законам более сложным.

Однако, следует иметь в виду, что даже самая строгая математическая теория не в состоянии дать точных значений сил сопротивления, так как силы эти в значительной степени зависят от случайных физических факторов, обусловливающих свойства материала колеблющейся конструкции.

Поэтому вполне целесообразно принимать и для иных видов затухающих колебаний формулы (18), как приближенные, определяя коэффициент затухания, соответствующий имеющимся в действительности силам сопротивления, на основании тех или иных теоретических соображений или же опытным путем.

Подобного рода теоретические исследования в настоящее время уже разработаны некоторыми американскими авторами для вынужденных колебаний при затухании систем с одною степенью свободы.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. H. van den Dungen. Cours de technique des vibrations, Bruxelles, 1926. Editions de la Revue de l'Ècole polytechnique, fasc. I et II.
2. Lydik S. Jacobsen. An approximate solution of the steady forced vibration of a system of one degree freedom under the influence of various types of damping. Bulletin of Seismological Society of America, vol. 20, № 3, September 1930.
3. В. И. Новоторцев. Метод последовательных приближений в применении к изучению свободных колебаний инженерных конструкций. Тр. Сейсм. инст. Акад. Наук СССР, 1933 г., № 23.
4. В. И. Новоторцев. Метод последовательных приближений в применении к исследованию вынужденных колебаний инженерных конструкций. Тр. Сейсм. инст. Акад. Наук СССР, 1933 г., № 26.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

К ВОПРОСУ ОБ ЭЛЕКТРОКРИСТАЛЛИЗАЦИИ МЕТАЛЛОВ

Статья третья[1]

Структура электролитических осадков серебра из расплавленных его солей

К. М. ГОРБУНОВОЙ

(*Представлено академиком* **В. А. Кистяковским**)

Электрокристаллизация металлов представляет собой довольно широко изученный процесс. Однако, большинство исследований в этой области относится к электролизу водных систем, для которых были получены весьма ценные выводы о влиянии плотности тока, концентрации электролита и температуры на механизм осаждения и структуру осадков.

Образование осадков металла при электролизе расплавленных солей изучалось значительно меньше, хотя высокий научный и технический интерес явления, казалось бы, и здесь имеет место.

Технические задачи, поставленные в современной электрометаллургии, все чаще и чаще наталкиваются на трудности осаждения металлов в твердом состоянии из расплавленных электролитов. Процесс электролитического получения бериллия проводится в настоящее время при 1400° Ц.[2], т. е. значительно выше температуры плавления металла. Трудности работы при такой высокой температуре очевидны. Применение же метода работы при температурах ниже точки плавления бериллия, как известно, ведет к выде-

[1] См. предыдущие статьи под тем же общим заголовком «К вопросу об электрокристаллизации металлов»: 1) В. А. Кистяковский, Ю. В. Баймаков и И. В. Кротов. I. Структура электролитических осадков меди. Изв. Акад. Наук по Отд. физ.-мат. наук, 1929, стр. 771, и 2) В. А. Кистяковский и П. Д. Данков. II. О центрах электрокристаллизации. Изв. Акад. Наук по Отд. мат. и естеств. наук, 1932, № 7, стр. 993.

[2] Способ Stock-Goldschmidt. Wissensch. Veröffentl. Siemens-Konzern, VIII, Heft 1 (1929), Beryllium-Arbeiten.

лению металла либо в виде порошка, либо в виде крупных дендритов, отделение которых от электролита и последующее сплавление чрезвычайно затруднительны.[1]

Работой В. А. Плотникова, В. П. Машовец и Н. С. Фортунатова[2] подтверждена возможность электролитического рафинирования алюминия при температурах ниже точки плавления металла, однако неблагоприятная структура катодно-осажденного алюминия и здесь является осложняющим препятствием.

Можно надеяться, что детальное изучение процесса электрокристаллизации в расплавленных электролитах наметит пути новых возможностей в области электролитического получения металлов (напр. алюминия, бериллия, магния и др.).

Структура металлических осадков, электроосажденных из расплавленных солей, изучалась немногими исследователями. Некоторые сведения о характере выделяющегося в твердом виде металла нами найдены в работе Атена, Гертога и Вестенберга[3], исследовавших структуру осадков серебра, меди, отчасти никкеля и железа. Указанные авторы были первыми исследователями, поставившими своей непосредственной задачей изучение структуры электроосажденных из расплавленных солей металлов.

В более ранней литературе имеются указания о характере осажденного при электролизе в твердом виде магния[4], серебра[5] и др.

В упомянутой работе В. А. Плотникова, В. П. Машовец и Н. С. Фортунатова была сделана попытка повлиять на структуру осажденного из расплавленных солей алюминия, путем введения различных добавок, изменением концентрации и плотности тока.

В исследовании Фишера[6] по получению гальванических покрытий из бериллия путем электролиза расплавленных солей имеются некоторые указания, касающиеся структуры полученных им осадков.

В настоящей работе сделана попытка анализа явления электрокристаллизации серебра из расплавленных солей, причем параллельно с исследованием макроскопической картины кристаллообразования мы остановили

[1] Lebeau. C. R. Acad. Sci. Paris, 126, 744 (1898); Ann. Chim. Phys. (7) 16, 495 (1899); Fichter u. Jablczynski. Ber. 46, 1604 (1913).

[2] Журнал хим. промышл. 1930 г., № 24, стр. 1476.

[3] A. Aten, H. Den Hertog u. L. Westenberg, Trans. Amer. Electroch. Soc. 47, 265 (1925).

[4] П. Федотьев. Электрометаллургия, ч. II, стр. 70.

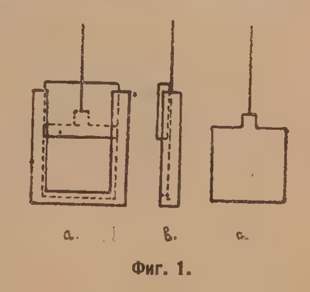
[5] Lorenz u. Helfenstein, Z. anorg. Ch. 23, 97 (1900). Richards u. Stall, Z. phys. chem. 42, 621 (1903).

[6] Fischer H. Wissensch. Veröffentl. Siemens-Konzern. VIII, Heft 1 (1929).

внимание и на микроструктуре металлических осадков. Для электролиза нами были выбраны системы, состоящие из азотнокислых солей серебра и щелочных металлов, в виду их сравнительно низкой температуры плавления. Другая серия опытов была проделана со смесями хлористых солей серебра и щелочных металлов.

В отдельных опытах каждой серии изменялись концентрация соли серебра, температура электролиза и катодная плотность тока.

Материалы и аппаратура. В качестве исходных материалов для приготовления электролита употреблялось азотнокислое серебро и хлористое серебро «для анализа», соответствующие соли калия и натрия были марки «Кальбаум» для анализа.



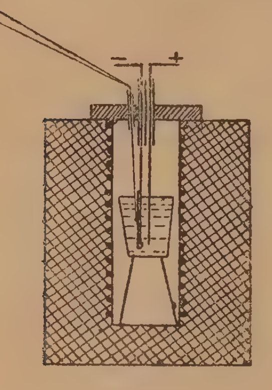
Фиг. 1.

Анод состоял из серебряной пластинки толщиною 0.5 мм, поверхностью около 2 см². Катод изготовлялся из тонкой (около 0.2 мм) серебряной жести. Рабочая поверхность катода равнялась 1 см². Во всех опытах размеры анода и катода оставались неизменными. Сверху к электродам приваривалась серебряная проволока, диаметром 1.0 мм. Для уменьшения потерь тепла через эту проволоку в случае работы с хлористым электролитом, в котором было обнаружено местное растворение катода и неравномерная коррозия анода, диаметр токоподводящей проволоки был уменьшен до 0.35 мм.

Серьезные затруднения встретились при электрической изоляции поверхности катода, не обращенной к аноду. Такого рода изоляция необходима из соображений большей точности в определении плотности тока на катоде. Невозможность применения обычных изолирующих материалов, как лак, парафин и др., употребляемых для этой цели в работе при низких температурах, привела нас к использованию фарфоровых футляров, изображенных на фиг. 1. Для изготовления их оказался пригодным бисквитный, т. е. низко обожженный и неглазурованный фарфор (тарелки или пластины). Фарфор этот без особых затруднений мог быть обработан мелкими напильниками для придания ему указанной на рисунке формы. Серебряная пластинка плотно входила в выточенные пазы. Верхняя часть катода закрывалась выдвигающейся фарфоровой же крышкой.

Применение этих футляров совершенно устраняло выделение металла на задней стороне катода и в верхней закрытой части катода. Футляр выдерживал 4—5 опытов, затем, давая трещины, разрушался.

Оба электрода перед погружением в электролит обрабатывались, при нагревании, раствором едкого натра, затем промывались аммиаком. Кроме того, катодная пластина предварительно очищалась наждачной бумагой.



Фиг. 2.

Электролиз производился в фарфоровом тигле, помещенном в электрическую печь сопротивления.

Схема расположения тигля, электродов и термопары дана на фиг. 2. Измерения температуры производились с помощью никкель-нихромового термоэлемента.

Результаты опытов. В следующих таблицах приведены результаты опытов электролиза азотнокислых и хлористых солей серебра.

Система $AgNO_3 — KNO_3 — NaNO_3$

№ опыта	Состав электролита	Температура по Ц.	Плотн. тока в амп/см²	Продолж. опыта (часы)	Характеристика осадка
2	$AgNO_3 \cdot KNO_3 \cdot NaNO_3$	330	0.050	3 5	Осадок легко отстает от катода в виде отдельных мелких кристаллов.
3	» » »	300	0.025	5.5	Осадок сравнительно плотно держится на катоде. Кристаллы крупные.
4	» » »	300	0 010	22.5	Осадок не сплошной, но плотно держится на катоде.
5	» » »	<300	0.005	52.5	Осадок отстал от катода в виде рыхло связанных друг с другом кристалликов. Массивные кристаллы.
6[1]	» » »	225	0.005	47	Осадок легко отстает от катода. Кристаллы крупные.
8	» » »	225	0.100	2	Первичный слой мелкокристалличен. Легко отстает от катода. Длинные иглы, растущие к катоду.
15	$AgNO_3 \cdot 2KNO_3 \cdot 2NaNO_3$	300	0.020	5	Осадок легко отстает от катода. Кристаллы небольшие.

[1] В одинаковых условиях и с одинаковыми результатами был опыт № 7.

Продолжение

№ опыта	Состав электролита	Температура по Ц.	Плотн. тока в амп/см²	Продолж. опыта (часы)	Характеристика осадка
16	$AgNO_3 \cdot 2KNO_3 \cdot 2NaNO_3$	300	1.000	0.13	Главным образом продолговатые кристаллы, удаленные от катода.
17 [1]	$AgNO_3 \cdot 5KNO_3 \cdot 5NaNO_3$	300	0.020	5	Мелковетвистые, папоротникообразные кристаллы.

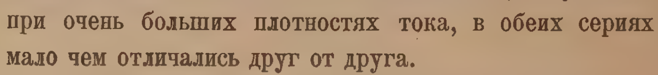
Система AgCl — KCl — NaCl

№ опыта	Состав электролита	Температура по Ц.	Плотн. тока в амп/см²	Продолж. опыта (часы)	Характеристика осадка
23а [2]	$5AgCl \cdot KCl \cdot NaCl$	700	0.050	2	Плотно приставший к катоду первичный слой. Вторичные кристаллы — характерные листочки.
21 [3]	$2AgCl \cdot KCl \cdot NaCl$	700	0.050	2	Плотно приставший к катоду первичный слой. Вторичные кристаллы крупнее, чем в опыте № 23.
10 [4]	$AgCl \cdot KCl \cdot NaCl$	725	0.050	1.5	Прочный осадок.
19 [5]	» » »	670	1.000	0.17	Длинные переплетающиеся друг с другом кристаллы.
25	$AgCl \cdot 2KCl \cdot 2NaCl$	700	0.050	2	Первичный слой плотно держится на катоде. Вторичный слой папоротникообразный, листочки площадью 1 см².
30	$AgCl \cdot 5KCl \cdot 5NaCl$	710	0.500	0.20	Осадок легко отставал от катода. Мелковетвистые образования направлены к аноду.
37 [6]	$AgCl \cdot 10KCl \cdot 10NaCl$	700	0.050	2	Легко отстает от катода. Длинные ветвистые образования, растущие к аноду.

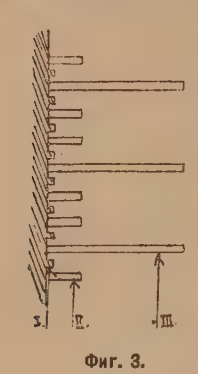
[1] Таким же был опыт № 18.
[2] В одинаковых условиях и с одинаковым результатом были опыты №№ 23 и 24.
[3] Таким же был опыт № 22.
[4] Такими же были опыты №№ 11, 31, 32, 33 и 34.
[5] Таким же был опыт № 20.
[6] Таким же был опыт № 38.

Во всех случаях осаждения серебра из расплавов, как азотнокислых, так и хлористых солей, можно было отличить невооруженным глазом три слоя, отличающихся друг от друга как по величине образующих их кристаллических образований, так и по их структуре. На фиг. 3 схематично изображено расположение этих слоев.

При переходе от азотнокислых солей к хлористым совершенно отчетливо изменялся внешний вид всех трех слоев. И только осадки, полученные



при очень больших плотностях тока, в обеих сериях мало чем отличались друг от друга.



Фиг. 3.

В пределах данной серии опытов наблюдалось некоторое изменение величины кристаллов при переходе от одной концентрации электролита к другой или от одной плотности тока к другой.

Первый слой обычно состоял из более или менее мелких кристаллов серебра.

Во всех осадках, полученных из расплавов азотнокислых солей, этот слой держался на катоде неплотно, и весь осадок при трении легко отставал, рассыпаясь на отдельные кристаллиты. В некоторых опытах (оп. № 5) отставший от катода осадок представлял собою более или менее связный слой неплотно сросшихся между собою кристаллов уже второго слоя.

В случае электролиза хлористых солей первый слой отлагающегося серебра настолько прочно приставал к катоду, что отделить его не представлялось возможным. И только в случае больших плотностей тока (0.5—1.0 амп/см^2) на катоде слой этот состоял из очень мелких при трении отстающих от катода кристаллов (оп. 19, 20, 30).

Второй слой состоял из более крупных кристаллических образований; в случае азотнокислых солей это были образования, почти равномерно развитые по всем трем направлениям (фот. 1 табл. I).

При хлористом электролите они представляли собою листочки серебра большей или меньшей величины, неправильно ограниченные (фот. 2 табл. I).

Большие, растущие вглубь электролита, нередко ведущие к замыканию электродов кристаллические образования составляют третий слой кристаллов. В осадках, полученных из азотнокислых солей, они имели характер длинных иглообразных с разветвлениями образований, являющихся следствием многократного двойникового срастания.

На фот. 1 и 3 табл. I можно видеть эти кристаллы. В некоторых случаях кристаллы эти имели более тупые очертания. При работе с хло-

ристыми солями характер кристаллов третьего слоя был совсем иной. Они представляли собою плоские папоротниковидные образования (нижние кристаллы на фот. 4 табл. I). Поверхность таких кристаллов доходила до 1 см^2.

При больших плотностях тока в осадке серебра отсутствовал второй слой; непосредственно на мелких кристаллах первого слоя в глубь электролита росли ветвистые длинные образования, подобные показанным на фот. 1 и 2 табл. II.

При работе с хлористым электролитом было обнаружено самопроизвольное растворение катода. В некоторых опытах катод растворялся почти полностью; иногда происходило частичное растворение с одновременным выделением серебра на других местах.

В ряде опытов явление это сказалось в неравномерном распределении осадка серебра на поверхности катода. На фот. 3 табл. II показан частично растворившийся катод. На фот. 4 табл. II видно неравномерное по поверхности распределение осадка.

Одновременно подобное явление имело место и на аноде. Неравномерное растворение его в этих случаях сопровождалось местным выделением кристаллов серебра на нем. На фот. 1 табл. III представлен один из таких анодов.

Для выяснения этого явления[1] были проделаны контрольные опыты с помещением в электролит серебряной пластины, не присоединенной к источнику тока.

В тех же термических условиях, при которых наблюдались указанные выше явления, было обнаружено, что пластина в одних местах растворялась (в большинстве случаев внизу), в других местах на ней происходило отложение кристаллов серебра (чаще всего вверху или внизу, ниже зоны растворения). Между зоной растворения и зоной осаждения наблюдалась нейтральная зона ненарушенной поверхности. На фот. 1 табл. III темная полоса на аноде представляет зону растворения.

Полагая причину этих явлений в термоэлектрических токах, возникающих благодаря неравномерному распределению температуры в электролите, мы усилили тепловую изоляцию печи, одновременно улучшив регулировку тока в нагревателе и уменьшив диаметр токоподводящих проволок. Результаты оказались положительными. Явление термоэлектрического растворения и осаждения было почти полностью устранено, в худших случаях сильно ослаблено.

[1] Более подробно это явление изучено в упомянутой выше работе A. Aten'a, H. Hertog'a и L. Westenberg'a.

При сопоставлении различных осадков, полученных из расплавов азотнокислых солей, довольно ясно выступает зависимость между содержанием $AgNO_3$ в расплаве и величиной образующихся кристаллов. Чем выше концентрация, тем больше размер кристаллических образований (указанное относится к кристаллам второго слоя). На осадках опытов №№ 18, 15 и 3 можно это проследить.

С уменьшением концентрации, при неизменной плотности тока, получаются такие же осадки, как и в случае больших плотностей тока, т. е. мелковетвистые, тонко очерченные образования серебра.

На фот. 2 табл. III дано изображение осадка из опыта № 18.

Повышение температуры электролиза (от 225 до 300° Ц.) также вызывает некоторое увеличение размеров кристаллов (оп. 7 и 5).

Уменьшение размеров кристаллов и большая тонкость их структуры наблюдаются при повышении плотности тока на катоде (оп. 5, 4, 3 и 8).

При больших плотностях тока, как уже указано, непосредственно от мелких кристаллов первого слоя начинают расти длинные, мелковетвистые папоротниковидные кристаллические образования.

В осадках, полученных из расплавов хлористых солей, обнаружить ясную зависимость между концентрацией электролита, температурой электролиза и размером кристаллов не удается.

Влияние плотности тока такое же, как и при электролизе азотнокислых солей.

При высоких плотностях тока осадки становятся очень сходными с осадками из азотнокислых солей при соответствующих плотностях тока.

Исследование микроструктуры осадков, полученных при электролизе хлористых солей, обнаруживает своеобразную картину.

В таблице IV мы приводим несколько микрофотографий, характеризующих структуру таких осадков[1]. Фотография 1 относится к случаю умеренной плотности тока и довольно высокой концентрации хлористого серебра. При рассмотрении микрошлифа трудно различить границу между основным катодом и поднимающимся над ним осадком металла, очевидно, в виду того, что первичный слой осадка является продолжением решетки кристаллов основного катода. Отдельные зерна, лежащие рядом с первичным слоем, представляют собой обломки кристаллов вторичного слоя.

Развитие кристаллов основного катода за счет выделяющегося при электролизе металла видно также из фот. 2, соответствующей концентрации

[1] Шлифы протравлены насыщенным раствором лимонной кислоты, содержащим несколько капель азотной кислоты (на 50 см^3).

более высокой, но одинаковой плотности тока и температуре. Для ясности взято увеличение несколько большее, чем в случае 1.

При малых концентрациях серебра, но при умеренной плотности тока, первичный слой значительно менее срастается с основным катодом, хотя это явление отчасти и продолжает иметь место (фот. 3). Если же при малой концентрации имеет место высокая плотность тока, то срастание первичного слоя с катодом совершенно уничтожается — образуются слабо связанные с катодом зерна, имеющие сравнительно малые размеры (фот. 4).

В рассмотренных микрофотографиях можно обнаружить ясно выраженную тенденцию зерен осадка (слабо связанных с катодом) располагаться параллельно поверхности катода. Следует отметить, что это расположение является следствием механической деформации, испытываемой образцом при приготовлении микрошлифов: зерна, растущие перпендикулярно к катоду, прижимаются к поверхности последнего при заделке образца в серебряную болванку и в таком положении остаются при шлифовании и наблюдении.

Обсуждение результатов. При изучении явлений электрокристаллизации в расплавленных солях весьма существенным обстоятельством, отличающим их от процессов в водных растворах, оказывается повышенная температура. Известные отличия, появляющиеся здесь, связаны, конечно, и с отсутствием воды в электролите. Однако, влияние последней, чрезвычайно сказываясь на многих свойствах электролизуемой системы, должно отступить на задний план в процессах ориентировки и закрепления атомов металла в кристаллической решетке. Определяющую роль начинают играть физические условия: температура, вязкость, наличие адсорбирующихся примесей и т. д.

Значение температуры понятно: подвижность элементов решетки и атомов, еще не вступивших в кристаллический коллектив, с повышением температуры увеличивается. Поэтому переход кристаллической системы в положение с минимумом свободной энергии существенно облегчается, следствием чего является образование крупных кристаллов.

Переходя к результатам нашего исследования — электрокристаллизация из расплавленных систем — нужно остановить внимание на структуре первичного слоя кристаллов осадка.

Прежде всего нужно отметить, что почти во всех случаях непосредственный контакт выделившегося металла с поверхностью основного катода не характеризуется образованием многочисленных ультрамикрокристаллов, что является совершенно обычным для осадков, полученных из водных растворов при низких температурах. Вместо множества зарождающихся и

конкурирующих друг с другом конусообразных кристалликов, мы наблюдаем или развитие кристаллов основного катода (фот. 1 и 2 табл. IV), или односторонний рост отдельных (весьма немногочисленных) кристаллитов, расположенных на микрофотографиях (табл. IV) параллельно поверхности основного катода. (Это расположение, очевидно, является следствием механической деформации осадка при изготовлении микрошлифа, и первоначальная ориентировка их соответствует положению кристаллита, повернутого на 90° к поверхности катода).[1] Размеры кристаллитов первичного слоя достигают 0.1 мм и обладают округлыми неопределенными очертаниями.

Тот факт, что выделяющийся металл сравнительно редко образует зародыши и включается в решетку кристаллов основного катода, показывает весьма убедительно на влияние температуры, господствующей в расплавленных системах. Атомы серебра настолько подвижны (при достаточно высокой температуре), что совершенно беспрепятственно могут перейти в положение минимума свободной энергии на поверхности кристалла основного катода. Сопоставление известной температуры рекристаллизации серебра (200° Ц.) и температуры электролиза (300—700° Ц.) убедительно говорит за то, что образование мелких кристаллов серебра в расплавленных средах невозможно.

Отдельные кристаллиты (обнаруживаемые на микрофотографиях шлифов в прижатом виде), возникающие из немногих зародышей, растут над поверхностью катода и достигают тоже больших размеров.

Однако, наиболее совершенного развития достигают кристаллиты, выходящие за пределы микрошлифов и очевидно очень слабо связанные с поверхностью основного катода. Они имеют макроскопические размеры и образуют щеткообразный слой, экранирующий поверхность катода от линий тока. После образования этого слоя возникновения зародышей на поверхности основного катода и продолжения роста составляющих его кристаллов не происходит. Некоторые кристаллы щеткообразного слоя могут вырасти далеко за пределы катода. Они значительно приближаются к аноду, концентрируют на себе линии тока, вследствие чего прекращается рост второго (щеткообразного) слоя.

Проводя параллель между процессами, протекающими в системах $AgNO_3$ — KNO_3 — $NaNO_3$ и $AgCl$ — KCl — $NaCl$, важно указать, что температура и здесь вызывала существенные отличия. Отмеченная нами

[1] В отмеченной выше работе Aten'а и др. также указывается на преимущественный рост ⊥ к катоду.

хорошая связь основного катода с первичным слоем выделившегося металла в случае системы из хлористых солей, и, наоборот, легкая отделяемость кристаллов от катода в случае азотнокислых солей говорят о том, что при 700° Ц. выделяющееся серебро легко входит в состав решетки кристаллов катода и значительно меньше, по крайней мере в начале электролиза, образует самостоятельно растущие кристаллиты. Для температуры 300° Ц. отношение меняется, большая часть атомов металла ориентируется вокруг тоже немногочисленных зародышей, образуя свойственные серебру двойниковые образования.

Кроме температуры, которой мы придаем большое значение, особенно при образовании первичного слоя, на структуре последнего сказывается другой фактор — плотность тока на катоде. Повышение плотности тока приводит к образованию слоя (первичного) кристалликов, слабо связанных с основным катодом (фот. 4 табл. IV). На подобное влияние повышения плотности тока указывают в своем исследовании В. Плотников, В. Машовец и Н. Фортунатов.

Выводы. 1. Осадки серебра, полученные при электролизе расплавленной смеси $AgNO_3$ — KNO_3 — $NaNO_3$ при различных концентрациях, температурах и плотностях тока, плохо связаны с основным катодом и легко отделяются от него при трении.

2. Электролиз расплавленной смеси $AgCl$ — KCl — $NaCl$ при различных концентрациях, температурах и плотностях тока, ведет к образованию осадков, первичный слой которых прочно связан с поверхностью катода. Исключение представляют осадки, полученные при очень больших плотностях тока (0.5—1.0 амп/см^2).

3. Исследование микроструктуры осадков из хлористого электролита указывает на вхождение атомов серебра, выделяемых в первой стадии электролиза, в решетку растущих за их счет кристаллов основного катода.

4. Сопоставление полученных в исследовании результатов (в связи с низкой температурой рекристаллизации серебра) заставляет предполагать невозможность получения из расплавленных солей мелкокристаллических осадков серебра. Возможность получения указанных осадков при высоких температурах для других металлов с более высокой температурой рекристаллизации заранее отрицать нельзя.

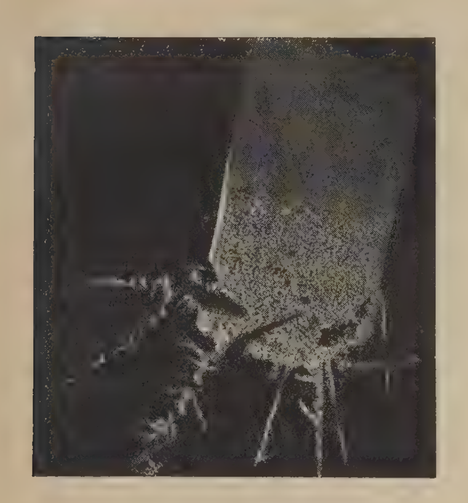
5. Основным фактором, определяющим процесс электрокристаллизации серебра из расплавленных солей, помимо специфических особенностей кристаллообразования этого металла, является температура.

Настоящее исследование представляет третью работу[1] на общую тему «Электрокристаллизация металлов», предложенную акад. В. А. Кистяковским.

Считаю своим долгом поблагодарить акад. В. А. Кистяковского за содействие, оказанное при выполнении настоящей работы.

Коллоидо-электрохимическая лаборатория Акад. Наук СССР.
Июнь 1932 г.

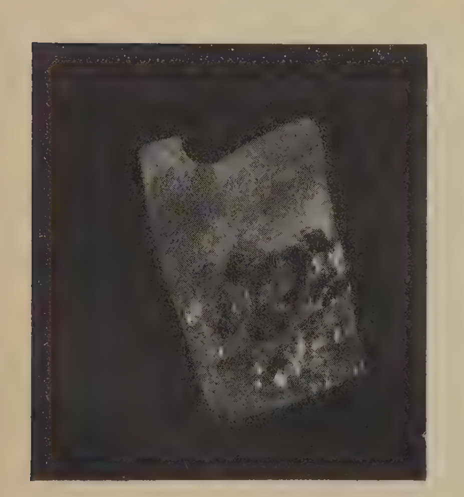
[1] См. примеч. 1 на стр. 255.



1. Опыт № 8 ($AgNO_3 \cdot KNO_3 \cdot NaNO_3$; 225° Ц.; 0.1 амп/см²; × 3.5).



3. Опыт № 2 ($AgNO_3 \cdot KNO_3 \cdot NaNO_3$; 330° Ц.; 0.05 амп/см²; × 3.5).



2. Опыт № 21 ($2\,AgCl \cdot KCl \cdot NaCl$; 700° Ц.; 0.05 амп/см²; × 3.5).



4. Опыт № 29 ($AgCl \cdot 5KCl \cdot 5NaCl$; 700° Ц.; 0.05 амп/см²; × 3.5)



1. Опыт № 30 ($AgCl \cdot 5KCl \cdot 5NaCl$; 710° Ц.; 0.5 амп/см^2; $\times$ 3.5).



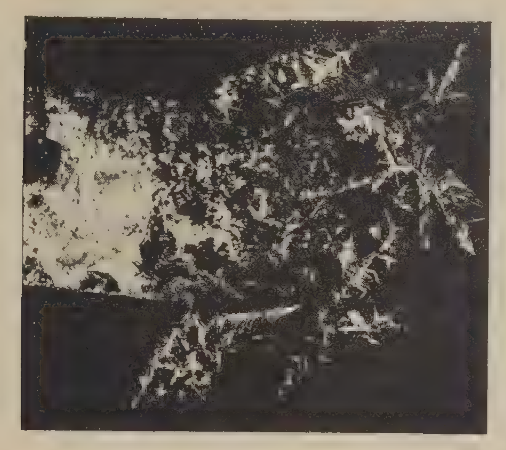
3. Опыт № 27а ($AgCl \cdot 5KCl \cdot 5NaCl$; 700° Ц.; 0.05 амп/см^2; $\times$ 3.5).



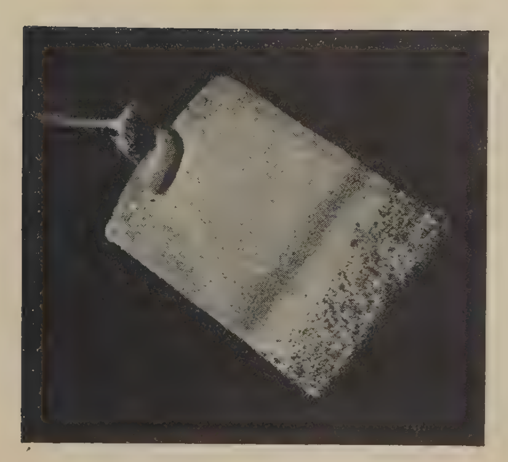
2. Опыт № 19 ($AgCl \cdot KCl \cdot NaCl$; 670° Ц.; 1.0 амп/см^2; $\times$ 3.5).



4. Опыт № 28 ($AgCl \cdot 5KCl \cdot 5NaCl$; 700° Ц.; 0.05 амп/см^2; $\times$ 3.5).



2. Опыт № 18 ($AgNO_3 \cdot 5KNO_3 \cdot NaNO_3$; 300° Ц.; 0.02 амп/см^2; $\times$ 3.5).



1. Опыт № 27а (анод) ($AgCl \cdot 5KCl \cdot 5NaCl$; 700° Ц.; 0.05 амп/см^2; $\times$ 3.5).



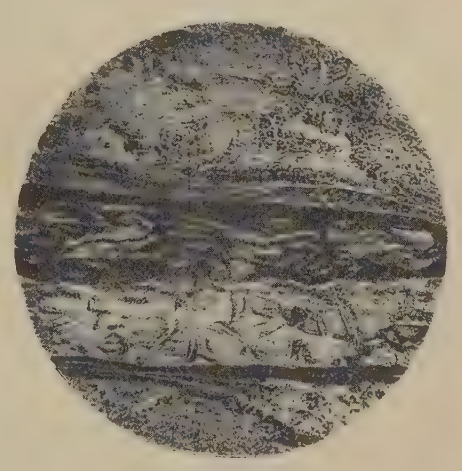
1. Опыт № 22 ($2AgCl \cdot KCl \cdot NaCl$; 700° Ц.; 0.05 амп/см^2; $\times$ 70).



3. Опыт № 34 ($AgCl \cdot KCl \cdot NaCl$; 700° Ц.; 0.05 амп/см^2; $\times$ 70).



2. Опыт № 23b ($5AgCl \cdot KCl \cdot NaCl$; 700° Ц.; 0.05 амп/см^2; $\times$ 70).



4. Опыт № 20 ($AgCl \cdot KCl \cdot NaCl$; 670° Ц.; 1 амп/см^2; $\times$ 70).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ОБ 1.2-ДИМЕТИЛВАЛЕРИАНОВОЙ КИСЛОТЕ

$$\begin{array}{l} CH_3-CH_2-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}-COOH \end{array}$$

А. Е. ЧИЧИБАБИНА и М. М. КАЦНЕЛЬСОНА

Вышеозначенная диметилвалериановая кислота была получена действием вторичного бромистого бутила $CH_3-CH_2-CHBr-CH_3$ на натр-метилмалоновый эфир и отщеплением CO_2 от метил-втор. бутилмалоновой кислоты, образующейся при омылении получающегося при реакции диэтилового эфира этой кислоты

$$CH_3-CH_2-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}(COOC_2H_5)_2.$$

Вторичный бромистый бутил был получен насыщением вторичного бутилового алкоголя бромистым водородом на холоду с последующим нагреванием на водяной бане в запаянной трубке в течении 4 часов. Бромид кипел при 91—91°.5 при 753 мм и имел уд. вес $d^{18}/_{18}$ — 1.2587, $d\,^0/_0$ — 1.2865.

Исходный вторичный бутиловый алкоголь был приготовлен нами восстановлением металлическим натрием метилэтилкетона во влажном эфирном растворе. Он кипел при 100—101° и имел уд. вес $d^0/_0$ — 0.8231.

1.2-Диметилвалериановая кислота

$$CH_3-CH_2-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}-COOH$$

содержит два асимметрических атома углерода, почему при отщеплении CO_2 от метил-бутил-малоновой кислоты можно было ожидать образования двух оптически недеятельных стереоизомеров диметилвалериановой кислоты. Совершенно резкая температура кипения кислоты не давала указания на присутствие двух изомеров. Для описанных ниже кристаллических производных нашей кислоты мы не могли открыть присутствия двух различных веществ при их кристаллизации. Это заставляет предположить, что в наших условиях образовался исключительно, или почти исключительно, лишь один из двух возможных стереоизомеров.

Получение метил-втор. бутил-малонового эфира. Из 200 г метилмалонового эфира, растворенного в 350 г абсолютного алкоголя, и 26.5 г натрия было приготовлено натриевое производное метилмалонового эфира и к продукту прибавлено 185 г вторичного бромистого бутила (20 г избытка против теоретического количества), после чего смесь нагревалась 5 часов на кипящей водяной бане с обратным холодильником. После этого был отогнан спирт, и к остатку прибавлена вода. Верхний маслянистый слой был отделен от водного, и последний извлечен эфиром. Эфирный раствор прибавлен к маслянистому продукту. После сушки сплавленным хлористым кальцием и отгонки эфира остаток подвергнут многократной фракционировке с дефлегматором.

Отделение чистого эфира от неизменного метилмалонового эфира (темп. кип. 198.5—199°.5) путем фракционировки достигалось лишь с большими потерями. Поэтому высшие фракции, кипевшие между 230 и 240° (25.1 г), были подвергнуты омылению раствором едкого кали в абсолютном спирте при кипячении с обратным холодильником. При этом выпадает калиевая соль, которая была отфильтрована, промыта небольшим количеством абсолютного спирта и высушена при 100°.

0.2579 г вещ.: K_2SO_4 — 0.1770 г

$C_8H_{12}O_4K_2$: вычисл. % K — 31.24; найд. % K — 30.80.

Калиевая соль, растворенная в небольшом количестве горячей воды, при прибавлении кислот и охлаждении выделила иглы свободной кислоты. После одной перекристаллизации из горячей воды они плавились при 118—119°.

0.2302 г вещ.: CO_2 — 0.4650 г; H_2O — 0.1740 г;

$C_8H_{14}O_4$: вычисл. % C — 55.17; % H — 8.05;

найд. » — 55.09; » — 8.40.

Часть кислоты была превращена в серебряную соль растворением в слабом аммиаке и осаждена раствором азотносеребряной соли. Выпавший белый порошок соли, нерастворимый в воде, был отфильтрован, промыт водой и высушен до постоянного веса в вакуум-эксикаторе.

0.2022 г вещ.: Ag — 0.1120 г;

$C_8H_{12}O_4Ag_2$: вычисл. % Ag — 55.65; найд. % Ag — 55.39.

Этиловый эфир метил-втор. бутил-малоновой кислоты был приготовлен из серебряной соли, чтобы познакомиться со свойствами чистого эфира. В реакцию взято 4 г Ag-соли и 5 г иодистого этила в абсолютном эфире. Смесь кипятилась с обратным холодильником 6 часов. Эфирный раствор отфильтрован. После отгонки эфира и избыточного иодистого этила получившийся этиловый эфир кипел при 236.5 — 238°.5 (терм. в парах) при 748 мм.

Вес эфира при 18° — 1.4754 г; вес воды при 18° — 1.5849 г;

$d^{18}/_{18}$ — 1.0009.

1.2-диметилвалериановая кислота. Кислота была получена из вышеописанной двухосновной кислоты нагреванием до прекращения выделения углекислоты. Разложение шло уже при температуре 130—135°. При перегонке образовавшейся одноосновной кислоты она вся перегналась в пределах 210.5—210.8° (терм. в парах) при 750 мм.

Вес кислоты при 18°	1.4754 г
» воды » 18°	1.5838 »
» кислоты » 0°	1.4953 »
» воды » 0°	1.5800 »

$d^{18}/_{18}$ — 0.9316; $d^0/_0$ — 0.9464.

Из кислоты была получена серебряная соль способом, указанным выше для соли двухосновной кислоты. Она представляла белый порошок, не растворимый в воде.

0.3362 г соли, высушенной до постоянного веса: Ag — 0.1530 г;

$C_7H_{13}O_2Ag$: вычисл. % Ag — 45.52; найд. % Ag — 45.51.

Кадмиевая соль кислоты была приготовлена настаиванием углекадмиевой соли с кислотой и водой в течение нескольких дней, причем смесь время от времени сильно встряхивалась. После того как капельки кислоты исчезли,

раствор был отфильтрован от углекислого кадмия и сгущен в вакууме до выпадения игольчатых кристаллов кадмиевой соли, после чего оставлен стоять сутки при обыкновенной температуре. Иголочки соли были затем отфильтрованы, а в маточном растворе определено содержание кадмиевой соли выпариванием отвешенной пробы досуха и высушиванием остатка до постоянного веса.

1) 1.2545 г раствора дали 0.0278 г Cd-соли;
2) 1.2100 » » » 0.0242 » »
Растворимость соли в 100 ч. 1-го раствора — 2.22; 2-го — 2.00.

Из серебряной соли был получен кипячением с иодистым метилом в абсолютном эфире метиловый эфир кислоты, кипевший при 155—158° при 743 мм.

0.1857 г вещ.: CO_2 — 0.4521 г; H_2O — 0.1870 г;
$C_8H_{16}O_2$: вычисл. % C — 66.67; % H — 11.11;
найд. » — 66.39; » — 11.19.

Хлорангидрид кислоты был получен нагреванием кислоты с треххлористым фосфором на водяной бане. Затем смесь разгонялась в вакууме. При вторичной перегонке хлорангидрид перегонялся при 110—113° при 193 мм.

Амид кислоты был приготовлен пропусканием газообразного аммиака в бензольный раствор хлорангидрида. После обработки водой до растворения образовавшегося хлористого аммония бензольный слой отделялся, сушился безводной сернонатриевой солью, после чего бензол отгонялся. Остаток, представлявший сырой амид, перекристаллизовывался из 50%-го алкоголя. При этом амид перекристаллизовывался в виде блестящих листочков с температурой плавления 101—103°.

0.2452 г вещ.: N — 19.1 куб. см (13°, 728 мм);
$C_8H_{17}ON$: вычисл. % N — 8.80; найд. % N — 8.84.

Анилид был получен кипячением на водяной бане бензольного раствора хлорангидрида с бензольным раствором анилина. После встряхивания с разбавленной соляной кислотой бензольный раствор анилида был отделен, высушен прокаленной сернонатриевой солью, и бензол был отогнан. Оставшийся сырой анилид перекристаллизовывался из петролейного эфира или

из разбавленного спирта. Полученные таким образом кристаллы анилида плавились при 71—72°.

0.2427 г вещ.: N — 14.00 куб. см (13,°728 мм);
$C_{14}H_{21}ON$: вычисл. $^0/_0$ N — 6.39; найд. $^0/_0$ N — 6.60.

Исследование фракций дробной кристаллизации анилида из вышеуказанных растворителей не позволило обнаружить присутствия второго стереоизомера. Все фракции представляли продукт, одинаковый по внешней форме, плавившийся при той же температуре. При той же температуре плавились и смешанные пробы различных фракций.

p-Броманилид готовился кипячением смеси бензольных растворов хлорангидрида и p-броманилина с дальнейшей переработкой, как описано для получения анилида. Перекристаллизованный из 70$^0/_0$-го спирта p-броманилид представлял кристаллы с температурой плавления 115—117°.



ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles — Отделение математических и естественных наук

ОБ α-ЦИКЛОПЕНТИЛПРОПИОНОВОЙ КИСЛОТЕ

```
CH2—CH2
 |    |
CH2  CH2
   \ /
   CH
    |
CH3—CH—COOH
```

А. Е. ЧИЧИБАБИНА и С. И. КОРЯГИНА

α-Циклопентилпропионовая кислота была получена нами действием бромистого циклопентила на натриевое производное метилмалонового эфира, с последующим омылением полученного метил-циклопентил-малонового эфира в метил-циклопентил-малоновую кислоту и отщеплением угольного ангидрида от последней.

Получение метил-циклопентил-малонового эфира. 5.7 г натрия растворялись в 85 г абсолютного алкоголя. К раствору этилата натрия прибавлялось постепенно 46.6 г этилового эфира метилмалоновой кислоты. При этом было заметно очень слабое разогревание, и смесь превратилась в кашицеобразную массу вследствие выделения осадка натриевого производного. После прибавления к смеси 40 г бромистого циклопентила она нагревалась на водяной бане в течение 4 часов. После этого взятая проба, разбавленная водой, уже не давала синего окрашивания лакмусовой бумажки.

Затем из смеси отгонялся алкоголь нагреванием на кипящей бане с насыщенным раствором поваренной соли. К остатку прибавлялась вода до полного растворения образовавшегося осадка бромистого натрия. После отделения маслянистого слоя водный слой извлекался эфиром, эфирный раствор прибавлялся к маслообразному веществу, и полученный эфирный раствор сушился сплавленным хлористым кальцием. После отгонки эфира остаток перегнан в вакууме при давлении 12 мм.

При 104° перегонялся неизмененный метилмалоновый эфир, а при 145—138° образовавшийся этиловый эфир метил-циклопентил-малоновой кислоты. Последнего получено 35 г, т. е. 54% теоретического количества.

Метил-циклопентил-малоновая кислота. Полученный эфир был омылен кипячением втечение 4 часов на водяной бане с 10%-м спиртовым раствором едкого кали. На 35 г эфира было взято 37 г едкого кали и 330 г абсолютного спирта. Уже вскоре после начала нагревания началось выделение тонких шелковестых листочков калиевой соли кислоты. По окончании нагревания и охлаждения смеси соль была отсосана и промыта холодным спиртом. Получилось 20 г соли. После сгущения маточного раствора отгонкой алкоголя до одной четверти первоначального объема выделилось еще 5 г той же соли.

Калиевая соль была разложена 40%-й серной кислотой. При этом выделились желтоватые кристаллы кислоты. Они были отфильторованы, высушены и перекристаллизованы из горячего бензола. При этом кислота выделилась в бесцветных призматических кристаллах. По отфильтровании и высушивании получено 15.5 г таких кристаллов, плавившихся при 150—151° с разложением (выделение CO_2).

Маточный раствор омыленного продукта выпарен досуха; затем прибавлялась вода, и раствор снова выпаривался досуха, после чего остаток обрабатывался эфиром. Нерастворившийся в эфире остаток после обработки 40%-й серной кислотой дал еще 3.3 г сероватых кристаллов кислоты, после перекристаллизовки из бензола имевших вышеуказанную температуру плавления 150—151°.

0.2093 г вещ.: CO_2 — 0.4444 г; H_2O — 0,1394 г;
$C_9H_{14}O_4$: вычисл. % C — 58.06; % H — 7.53;
найд. » — 57.91; » — 7.40.

Серебряная соль кислоты была приготовлена растворением кислоты в слабом аммиаке и осаждением азотносеребряной солью. При этом она оседала в виде мелких плоских игол.

I. 0.2322 г вещ.: Ag — 0.1295 г; II. 0.3458 г вещ.: Ag — 0.1865 г;
$C_9H_{12}O_4Ag$: вычисл. % Ag — 54.00;
найд. % Ag: I — 53.96; II — 53.93.

α-Циклопентилпропионовая кислота. 18 г метил-циклопентил-малоновой кислоты нагревались на металлической бане при 180° до прекра-

щения выделения углекислоты, после чего остаток был перегнан. При этом получились фракции: 1) 225—239°.5—4.5 г и 2) 239.5—241°—12 г. Первая фракция содержала немного продукта, нерастворимого в щелочи. После обработки ее щелочью, извлечения нейтральных продуктов эфиром и выделения кислоты, последняя при перегонке дала фракции: 1) 230—239°.5—1.5 г и 2) 239.5—241°—2.5 г.

Анализирована кислота с температурой кипения 238.5—241°.

0.1884 г вещ.: CO_2 — 0.4662 г; H_2O — 0.1692 г;
$C_8H_{14}O_2$: вычисл. % C — 67.61; % H — 9.86;
найд. » 67.49; » 9.98.

Кислота представляет нерастворимую в воде маслянистую жидкость с запахом нефтяных кислот.

1) Вес кислоты в пикнометре при 19°	1.6868 г
» воды » » » 19°	1.6759 »
2) Вес кислоты при 0°	1.7078 »
» воды » 0°	1.6774 »

$d^{19}/_{19}$—1.0065; $d^{0}/_{0}$—1.0191

Серебряная соль кислоты получена осаждением раствором азотносеребряной соли раствора кислоты в возможно малом количестве слабого аммиака. Соль представляет белый порошок, трудно растворимый в воде.

0.1296 г вещ.: Ag — 0.0561;
$C_8H_{13}O_2Ag$: вычисл. % Ag — 43.038; найд. % Ag — 43.36.

Кадмиевая соль кислоты $Cd(C_8H_{13}O_2)_2 + 5H_2O$ была получена осаждением раствором хлористого кадмия раствора кислоты в слабом аммиаке. При этом соль выпадала в виде красивых мелких белых иголочек.

0.2575 г вещ.: потеря при высушивании при 100°—0.0481 г;
$Cd(C_8H_{13}O_2)_2 + 5H_2O$: вычисл. % H_2O — 18.55; найд. % H_2O — 18.68;
0.2094 г безводной соли: $CdSO_4$ — 0.1107 г;
$Cd(C_8H_{13}O_2)_2$: вычисл. % Cd — 28.43; найд. % Cd — 28.48.

Хлорангидрид α-циклопентилпропионовой кислоты был получен действием треххлористого фосфора на кислоту. Для очищения он был дважды перегнан в вакууме. При 49 мм давления он кипел при 107° и представлял бесцветную жидкость неприятного запаха.

0.3039 г вещ.: AgCl — 0.2777 г;
$C_8H_{13}OCl$: вычисл. % Cl — 22.12; найд. % Cl — 21.99.

1) Вес кислоты при 21°.5 . . . . 1.1708 г
» воды » 21°.5 . . . . 1.1190 »
2) Вес кислоты при 0° . . . . 1.1899 »
» воды » 0° . . . . 1.1899 »

$d^{21.5}/_{21.5}$—1.0463; $d^0/_0$—1.0621.

Метиловый эфир кислоты был получен кипячением раствора иодистого метила в абсолютном эфире с порошком высушенной при 100° серебряной соли кислоты. Он представлял бесцветную жидкость фруктового запаха, кипящую при 189.5—191°.

0.1602 г вещ.: CO_2 — 0.4059 г: H_2O — 0.1487 г;
$C_9H_{16}O_2$: выч. % C — 69.23; % H — 10.26;
найд. » 69.10; » 10.31.

1) Вес эфира при 19° . . . . 0.8361 г
» воды » 19° . . . . 0.8715 »
2) Вес эфира при 0° . . . . 0.8491 »
» воды » 0° . . . . 0.8719 »

$d^{19}/_{19}$ — 0.954; $d^0/_0$ — 0.9716.

Амид кислоты был получен пропусканием аммиака в бензольный раствор хлорангидрида. Из горячего бензола амид кристаллизуется в тонких листочках с температурой плавления 136.5 — 137°.

0. 1545 г вещ.: N — 14.15 куб. см (22°, 734 $^{11}/_{44}$);
$C_8H_{15}ON$: вычисл. % N — 9.90; найд. % N — 9.90.

Анилид получен действием анилина на раствор хлорангидрида в бензоле. Из бензольного раствора при разбавлении лигроином анилид кристаллизуется в иголочках с температурой плавления 115—116°.

0.2010 г вещ.: N — 12.1 куб. см. (21°, 740 мм);
$C_{14}H_{19}ON$: вычисл. % N — 6.45; найд. % N — 6.55.

p-Нитранилид получен действием p-нитранилина на бензольный раствор хлорангидрида. Нитранилид кристаллизуется из бензола в иголочках с температурой плавления 167—168°.

0.1580 г вещ.: N — 15.0 куб. см. (21°, 738 мм);
$C_{14}H_{18}ON_2$: вычисл. % N — 10.69; найд. % N — 10.60.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

О ЗЕМЛЕТРЯСЕНИИ 6 АПРЕЛЯ 1932 Г. В ПРИКАЗБЕКСКОМ РАЙОНЕ ЦЕНТРАЛЬНОГО КАВКАЗА

А. Я. ЛЕВИЦКОЙ И Л. А. ВАРДАНЯНЦА

(*Представлено* Сейсмологическим институтом)

В связи с развертывающимися работами Кавказской Сейсмической экспедиции Сейсмологического института Академии Наук СССР по изучению сейсмичности района перевальной железной дороги небезынтересно будет опубликовать некоторые сведения о землетрясении 6 апреля 1932 года, имевшем место в упомянутом районе.

В 1932 г. начала работу на Кавказе региональная сейсмическая сеть Академии Наук СССР в числе четырех региональных станций: в Грозном, Краснодаре, Сочи и Эривани. Станции снабжены горизонтальными сейсмографами системы проф. П. М. Никифорова с оптической регистрацией с увеличением от 400 до 800 и периодом собственных колебаний ок. 2 сек.

6 апреля 1932 г. приборами на сейсмических станциях в Грозном, Эривани и Краснодаре было отмечено землетрясение около 0^h по среднему гриничскому времени или около 3^h по поясному времени на Кавказе.

По разности моментов прихода поверхностных волн L и продольных волн P по таблице V. Conrad'а были определены расстояния эпицентра от названных станций. Ниже приведены: вычисленное время наступления землетрясения в эпицентре O, наблюденные моменты прихода фаз P и L по среднему гриничскому времени н эпицентральные расстояния Δ в км.

Станция	O	P	L	Δ
Грозный	$0^h13^m58^s$	$i\,0^h14^m16\overset{s}{.}1$	$i\,0^h14^m28\overset{s}{.}3$	103 км
Эривань	14 02	i 14 56	i 15 33	290
Краснодар	14 03	15 36	16 45	520

Время наступления землетрясения в эпицентре было вычислено, приняв за скорость распространения продольных волн в верхних слоях земли величину, равную 5.6 км/сек, полученную из ряда наблюдений в Зап. Европе, и за глубину очага землетрясения величину, равную 0, так как по всей вероятности это землетрясение не глубинного происхождения.

Имея эпицентральные расстояния для трех станций, можно было по методу засечек определить положение эпицентра, географические координаты которого получились следующие:

$$\varphi = 42° 48' \text{N}$$

$$\lambda = 44° 38' \text{E от Гринича,}$$

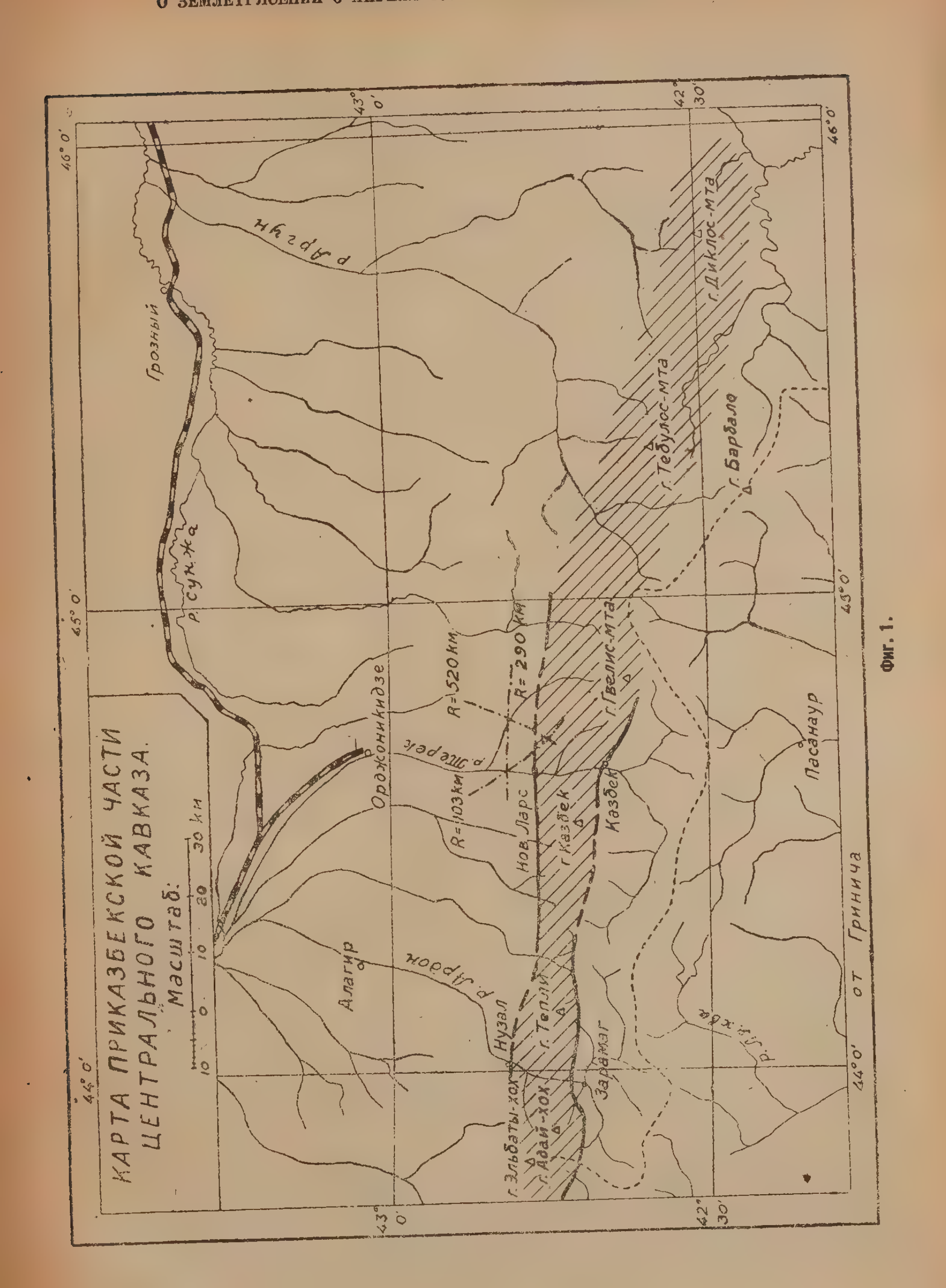
т. е. эпицентр землетрясения лежит к NE от Дарьяла и в 4—5 км от станции Новый Ларс.

Ниже приведены значения периодов колебаний почвы T_p, амплитуд истинных смещений почвы A и ускорений W в максимальной фазе этого землетрясения, вычисленных по составляющим NS и EW.

Станция	T_p	A_n	A_e	W_n	W_e
				мм/сек²	мм/сек²
Грозный	1.6	—80	+80	1.2	1.2
Эривань	1.5	— 9	—14	0.2	0.6
Краснодар	1.8	+ 6	—	0.1	—

Из приведенных величин следует, что данное землетрясение нельзя отнести к числу сильных землетрясений.

Согласно вышеприведенным координатам эпицентральная область располагается в северной части того оротектонического элемента Центрального Кавказа, который со времен Г. Абиха известен под названием Бокового хребта. Существенная особенность этого хребта заключается, во-первых, в том, что он состоит из отдельных горных массивов, разделенных глубокими ущельями рек, стекающих на север, а, во-вторых, в том, что именно к Боковому хребту приурочены высочайшие вершины этой части Кавказа. На западе Боковой хребет начинается в горной группе Адай-хох (г. Эльбаты-хох); на востоке он протягивается вглубь Дагестана. В состав Бокового хребта входят горные массивы (с запада к востоку): Адай-хох, Цмиа-


КАРТА ПРИКАЗБЕКСКОЙ ЧАСТИ ЦЕНТРАЛЬНОГО КАВКАЗА.
Масштаб:
10 0 10 20 30 км
Грозный
р. Аргун
р. Сунжа
Орджоникидзе
р. Терек
R=520 км
R=290 км
R=103 км
Нов. Ларс
г. Казбек
Казбек
г. Гвелис-мта
г. Тебулос-мта
г. Диклос-мта
г. Барбало
Пасанаур
Алагир
р. Ардон
Нузал
г. Тепли
Зарамаг
г. Адай-хох
46°0'
45°0'
44°0'
43°0'
42°30'
44°0' от Гринича

Фиг. 1.

ком-хох — Тепли, Колкай-хох — Казбек, Гвелис-мта, Тебулос-мта и, наконец, Диклос-мта (см. карту).

Как в отношении геоморфологии, так и в геологическом отношении Боковой хребет на всем его протяжении представляет довольно однообразную картину, будучи сложен главным образом нижне-юрскими песчаниками и сланцами, пересеченными многочисленными дайками и пластовыми залежами изверженных пород, близких по составу к диабазам. В силу этой особенности предпочтительнее называть этот хребет Казбекским-Диабазовым, а не Боковым. Старое же название мало подходит в силу того, что хребет этот является одной из главнейших структурных частей Большого Кавказа, а не второстепенной, как предполагал Г. Абих.

Геологические работы последних лет (Л. А. Варданянц, В. П. Ренгартен) показали, что Казбекский-Диабазовый хребет в целом представляет длинный клин, обращенный острым ребром вниз и выжатый кверху. Более детально клин изучен на протяжении до 100 км в бассейнах рек Ардон, Терек и Асса, где ширина клина в среднем около 10—15 км. В силу этого клин можно понимать как узкий горст. Внутреннее строение горста очень сложное и не может быть описано в настоящей краткой заметке. Можно лишь указать, что в пределах более западной части строение горста приближается к веерообразному.

Как с севера, так и с юга горст ограничен зонами крупнейших сбросов и надвигов. Из них южная зона пересекает р. Ардон в $1^1/_2$—2 км к северу от сел. Зарамаг, а р. Терек около станции Казбек. Северная же зона пересекает ущелье р. Ардон около сел. Нузал, а ущелье р. Терек около станции Новый Ларс.

Некоторые геоморфологические особенности ущелий рр. Ардон и Терек, изученных наиболее хорошо, дают полное право предполагать, что последнее крупное поднятие горста произошло перед вюрмским оледенением, т. е. примерно около 100 000 лет тому назад. При этом относительная амплитуда поднятия должна измеряться величинами порядка 400 м, а общая амплитуда могла достигать даже до 1000 м. Помимо этого более мелкие подвижки, с амплитудой поднятия до нескольких десятков метров, происходили перед бюльской стадией отступания вюрма, т. е. приблизительно 20 000 лет назад.

Вполне естественно возникает вопрос, закончилось ли поднимание, выжимание горста кверху, и достиг ли он устойчивого положения. На этот вопрос нужно ответить отрицательно. Горст находится в неустойчивом положении, и подвижки вдоль сбросовых трещин, пересекающих и ограничиваю-

щих горст, продолжаются еще и сейчас. В пользу такого решения говорят следующие факты:

1) Неоднократные зарегистрированные землетрясения (1915 г. и др.), эпицентры которых находятся в непосредственном соседстве с Дарьяльским ущельем, расположенным в северной части горста. Землетрясениями 1915 г. обусловлены каменный обвал в Дарьяле и отрыв конца Девдоракского ледника.

2) Грандиозные обвалы Девдоракского и Генал-донского ледников, имевшие место в течение последних 150 лет. Ледники эти расположены точно на линии сбросов, ограничивающих с севера горст Казбекского-Диабазового хребта. Связь этих обвалов с сейсмикой, после аналитического исследования, сделанного одним из авторов настоящей статьи, едва ли может вызывать сомнение.

3) Крупнейший обвал ледника Хардотчин, происшедший в 40-х годах прошлого столетия. Этот ледник расположен в Куртатинском ущелье (массив г. Тепли) в пределах южной периферии горста.

4) Крупнейший каменный обвал с горы Багни и разрушение ледника Абано (массив Казбека), имевшие место в 1909 г. Гора Багни и ледник Абано расположены точно на линии крупнейшего разрыва, ограничивающего Казбекский-Диабазовый хребет с южной стороны.

5) Архивные материалы, указывающие на землетрясение в районе сел. Нижний Зарамаг.

В этих условиях новое землетрясение, эпицентр которого определен по данным трех сейсмических станций, представляет большой интерес. Как указано выше, эпицентр находится в непосредственном соседстве с Дарьялом: всего лишь в 4—5 км к NE от него. Это может служить лишним доказательством того, что область интересующего нас горста продолжает оставаться в неустойчивом положении, и здесь дальнейшие подвижки и сотрясения более чем естественны. В то же время область Казбекского-Диабазового хребта характеризуется молодыми формами рельефа и эрозии, т. е. глубокими, узкими ущельями с крутыми скалистыми склонами. При новых землетрясениях здесь вполне возможны крупные обвалы как чисто каменные, подобно обвалам горы Багни и в Дарьяльском ущелье, так и ледниковые обвалы, подобно историческим обвалам Девдоракского и Генал-донского ледников. И в том и другом случае искусственные сооружения, возведенные в ущельях, пересекающих Казбекский-Диабазовый хребет, будут находиться под угрозой разрушения.

НЕКОТОРАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ГЕОЛОГИИ КАЗБЕКСКОГО-ДИАБАЗОВОГО ПОЯСА

Варданянц Л. А. Материалы по тектонике Центрального Кавказа (Военно-Осетинская дорога). Зап. Минер. общ. 2 сер., ч. 59, вып. 2, 1931, стр. 309—328.

—— Геотектоника и геосейсмика Дарьяла как основная причина катастрофических обвалов Девдоракского и Генал-донского ледников Казбекского массива. Изв. Гос. Геогр. Общ., 1932, т. LXIV, вып. I, стр. 51—60.

Духовской А. И. Исследование Казбекских ледников: Суатиси, Мна, Орцверн, Абано, Driskoli Чачского и ледника Кибиша Кистинского ущелья в 1909—1913 гг. Изв. Кавказск. отдела Русск. Геогр. Общ., 1917, т. XXV, № 1, стр. 1—48.

Ренгартен В. П. История долины Ассы на Северном Кавказе. Изв. Русск. Геогр. Общ. 1925, т. LVII, вып. 2, стр. 53—106.

—— Тектоническая характеристика складчатых областей Кавказа. Тр. III Всесоюзн. съезда геологов в 1928 г. в Ташкенте. Ташкент, 1930.

—— Горная Ингушетия. Геологические исследования в долинах рек Ассы и Камбилеевки на Северном Кавказе. Тр. Главн. геол.-разв. упр., 1931, вып. 63.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

OBSERVATIONS SUR LES VÉGÉTAUX NOUVEAUX DU TERRAIN PERMIEN INFÉRIEUR DE L'OURAL. I

Par **M. ZALESSKIJ (M. Zalessky)**

(*Présenté par* V. Komarov, *membre de l'Académie*)

H. T. Mauer a eu l'obligeance de m'envoyer pour mes études une collection intéressante de restes végétaux des dépôts, connus sous le nom d'Artinskiens ou plutôt Artiens des rivières Sylva et Barda, collection qui a été formée par H. T. Mauer dans ces lieux mêmes. Cette collection verse une lumiere nouvelle sur la constitution de notre flore du permien inférieur, grâce à la présence d'une quantité déjà considérable de conifères du groupe *Araucariacées* et de quelques représentants nouveaux et originaux de la classe de *Salisburiées* ou *Ginkgoales*. Jusqu'à présent les *Araucariacées* n'ont pas été connues d'une manière certaine dans le permien inférieur de l'Oural. Quant aux formes végétales de la classe des *Ginkgoales,* celle-ci n'a été généralement représentée dans les sédiments permiens (en excluant les *Ginkgoites* et le genre *Ginkgophyllum* qui n'appartien qu'à ces sédiments-là) que par des formes qui par quelques traits rappellent les formes du houiller supérieur.

J'ai démontré, il n'y a pas longtemps, dans mon article: «Sur deux nouveaux *Dicranophyllum* du terrain artinskien de l'Oural», que ce genre de *Salisburiées* a été représenté par deux formes originales avec des feuilles largement cunéiformes, fortement demembrées.

La collection de H. T. Mauer présente, comme supplément à ceux, découverts auparavant, des nouveaux exemples de *Dicranophyllum*, non moins originaux, mais avec des feuilles d'une dimension beacoup plus grande et de contours encore plus cunéiformes. Trois formes pareilles ont été trouvées encore.

Tout ce que je viens de dire nous permet de supposer qu'au temps du permien inférieur cet ancien groupe de *Salisburiées* a été particulièrement

bien représenté. Si je rappelle ici que j'ai découvert ce même groupe de plantes, comprenant au moins deux ou trois éspèces, dans d'autres localités du développement (d'après mon opinion) des sédiments du permien inférieur,— nòtamment dans le bassin de Kousnetzk — cette supposition devient très probable. Ces espèces nouvelles de *Dicranophyllum* de Kousnetzk sont pourtant tout à fait différentes de celles trouvées à l'Oural.

La collection de H. T. Mauer renferme hormis ces formes intéressantes, encore une fougère nouvelle *Bardia*, voisine peut-être, du genre *Psygmophyllum*, genre que je comprends dans le sens de Saporta et qui, par conséquent, n'est représenté jusqu'ici, comme on le sait, qu'à l'Oural et dans quelques localités de l'Asie du Nord (au bassin de Kousnetzk et en Mongolie).

En gardant la description des conifères *Araucariacées* pour thème de mon prochain article, je ne donnerai ici que la description des représentants nouveaux des *Dicranophylleae,* parmi lesquels j'établis le nouveau genre *Mauerites*, comprenant deux ou trois espèces et la description d'une nouvelle espèce du genre nouveau *Bardia* qui par tous ses traits justifie l'incorporation de ce genre aux fougères. J'établis le nouveau genre *Mauerites* et la nouvelle espèce du genre nouveau *Bardia* en l'honneur de l'amateur bien connu et collectionneur des restes organiques fossiles de l'Oural H. T. Mauer. Notre science lui doit ces trouvailles précieuses et certes son nom doit y être indissolublement lié.

J'offre ici, comme un devoir très agréable, l'expression de ma gratitude profonde à H. T. Mauer, ainsi qu'a la Base des recherches géologiques de Perm, qui possède actuellement toutes les collections paléontologiques de H. T. Mauer, qui m'ont donné l'occasion d'étudier et de décrire ces échantillons intérressants. La Base des recherches géologiques de Perm a, en plus, acquitté les dépenses occasionnées par l'éxécution des dessins explicatifs de cet article qui ont été faits par G. M. Zalessky d'après les originaux avec toute l'exactitude possible.

DESCRIPTION DES RESTES VÉGÉTAUX

Filicales

Bardia Maueri Zalessky n. g. et n. sp. (Fig. 1)

Frondes palmées de petites dimensions avec long rachis, situées spiralement sur rhizome court, long de 3 mm et conservé sur l'etendue d'un centimètre. Longueur de la fronde avec rachis 88 mm, dont le rachis

tient 51, largeur de la partie palmée 31 mm. Le limbe de la fronde est divisé par la dichotomie du rachis en deux moitiés presque symétriques, dont chacune est successivement bifurquée en lobes et lobules cunéiformes. D'ailleurs les portions cunéiformes intérieures de chaque moitié sont nota-

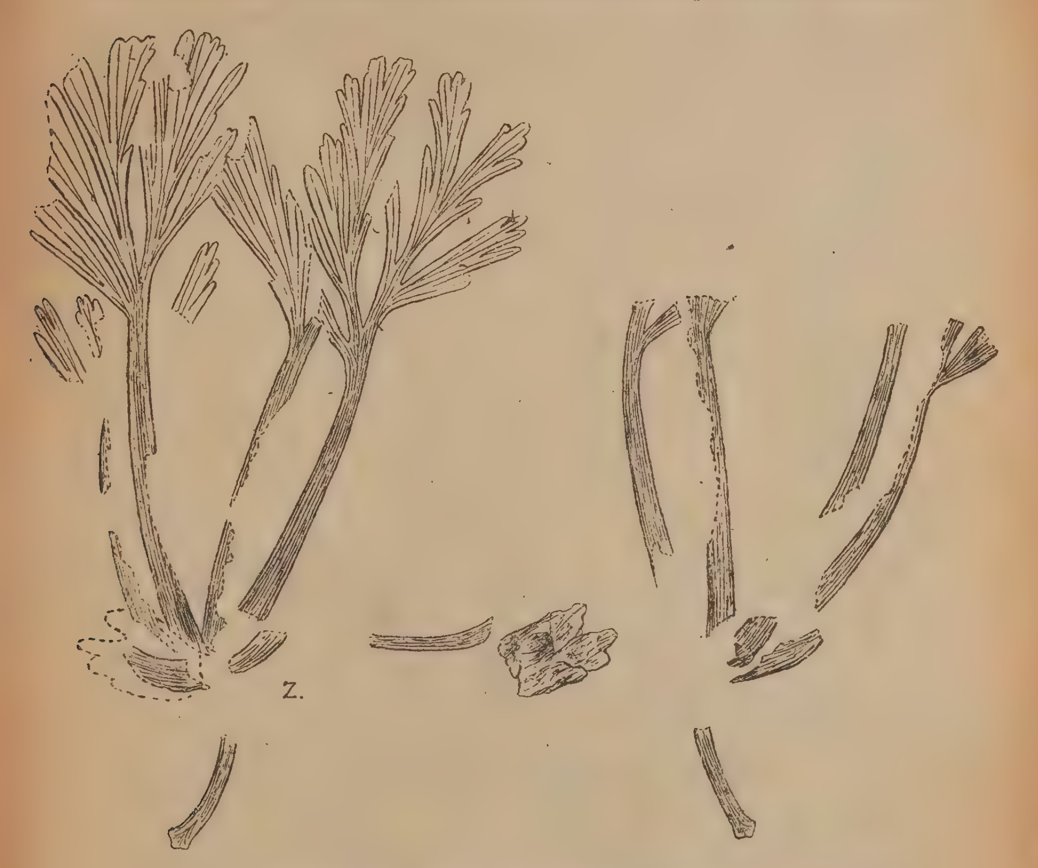


Fig. 1. *Bardia Maueri* Zalessky. Station Kichert près du village Piatkova, sur la riviére Kicherka du bassin de Barda. Artinskien. 1 : 1.

blement mieux développées que celles du bord. Le rachis sur l'empreinte est bariolé longitudinalement par des traits réguliers qui se prolongent aussi sur le limbe, en masquant plus ou moins le nervation. On ne trouve pas sur l'échantillon l'impression de la trace foliaire au rachis, mais au dessus de la dichotomie du rachis dans le limbe elle devient perceptible dans chacune de ses moitiés, plus ou moins symétriques. Elle se présente comme une seule nervure qui dichotomise successivement plusieurs fois avec formation d'une

nervation assez rare. Une seule nervure entre dans chaque lobe du limbe palmatisequé.

Il n'y a qu'un seul échantillon de cette plante intéressante présentant l'empreinte de quatre frondes pas entièrement conservées qui par leur rachis se rapprochent vers un point au bas de l'empreinte et qui étaient indubitablement situées sur un court rhizome, qui a laissé son empreinte sur le revers de l'échantillon, aux bords d'un trou dans ce dernier, sur l'étendue d'un centimètre (fig. 1). On voit sur la contre-empreinte de l'échantillon mentionné 5 fragments de rachis de fronde, qui se rapprochent aussi vers un point, avec superposition évidente dans leur partie inférieure.

D'après mes notions, la plante décrite présente une petite fougère, qui rappelle un peu le *Rhipidopteris peltata* Sw de nos jours (*des Polypodiacées*) ou, peut-être, plutôt *l'Actiniopteris radiata* (König) Link de la même famille et, suivant les particularités caractéristiques de sa fronde, doit être voisine du genre *Psygmophyllum*, en comprenant ce genre dans un sens étroit, comme le comprenait Saporta, c'est à dire en prenant pour type de ce genre le *Psygmophyllum expansum* Brongn. et le *Psygmophyllum cuneifolium*. La fig. 1 représente dans sa partie gauche quatre frondes incomplètes du *Bardia Maueri*, qui ont laissées leurs empreintes sur une moitié de l'échantillon et, au milieu, un fragment de rhizome sur le revèrs du même échantillon, qui présente une continuation naturelle de la section inférieure de ces frondes, au-delà de l'enfoncement avec trou qui se trouve dans l'interruption de la figure. La partie droite de la fig. 1 représente les fragments des rachis de fronde de la contre-empreinte du même échantillon là, ou ils convergent vers un point, en se trouvant dans différents plans, comme ils étaient placés en réalité sur le rhizome.

Provenance et horizon. St^{n} Kichert près du village Piatkova, sur la rivière Kicherka du bassin de la rivière Barda, ravin Salamatovsky. Artinskien.

Ginkgoales

Dicranophyllum bardense Zalessky n. sp. (Fig. 2 et 3).

Feuilles demembrées de contour généralement cunéiforme, longues jusqu'a 14—15 cm et larges dans leur partie apicale jusqu'à 5 cm. La partie basilaire de la feuille est loranthiforme et large de 4.5 mm. A une distance de 8.5 cm de la base, cette partie dichotomise sous un angle de 30°. Chacune des lanières de cette dichotomie, large de 4.5 mm, dichotomise à son tour à une certaine distance d'elle, sous un angle de 25—30°, en formant



Fig. 2. *Dicranophyllum bardense* Zalessky n. sp. Rivière Barda, en aval du village Matvéevo, Artinskien. 1 : 1.

des lanières plus étroites, larges de 2.5 mm environ, parfois courbées en arc. Les feuilles, que je viens de décrire, et celles de dimensions beaucoup plus petites avec une triple ramification de la portion du limbe, sont grouppées de manière à donner l'impression qu'elles étaient placées spiralement sur un seul et même jet, dont la largeur atteignait 6 mm. Ce jet porte au moins quatre grosses feuilles et deux petites à lanières raccourcies et à une dichotomie qui s'enchaîne fréquemment. Elles représentent probablement des feuilles non développées de la partie apicale du jet. Toute la surface du limbe foliaire est couverte de stries parallèles, épaisses. Ces stries sont disposées au nombre de 20 sur la portion basilaire loranthiforme de la feuille, large jusqu'à 4.5 cm. Parfois, quand la surface des feuilles est éclairée d'une certaine manière, on y voit une nervure traversant le milieu de chaque lanière du limbe et se divisant en deux rameaux bien avant la dichotomie de la lanière même, comme cela a lieu chez les autres *Dicranophyllum*.



Fig. 3. *Dicranophyllum bardense* Zalessky. Rivièrc Sédouchka, près de village Séda (valleé Sedovsky) Artinskien. 1 : 1

Je donne les reproductions de deux échantillons des empreintes des feuilles du *Dicranophyllum bardense*. Le premier échantillon à feuilles longues, situées sur le jet et à feuilles raccourcies à son sommet, a servi principalement à la déscription de l'espèce; il provient de la rivière Barda, en aval du village Matveevo (collection H. T. Mauer); le second avec l'empreinte du fragment détaché d'une feuille fortement demembrée, provient de la riviere Sédouchka, prés du village Séda (vallée Sédovsky, Krouglov). Sur cette empreinte du fragment de feuille, on ne voit la nervation que sur quelques lanières finales et cela en guise d'une faible impression. Toute la surface du limbe foliaire est couverte de stries parallèles, qui cachent totalement la nervation.



Maueritis gracilis Zalessky n. g. et n. sp. Rivière Barda, de la localité Krasnaïa Glinka. Artinskien. 1 : 1.

Genre *Mauerites* Zalessky n. g.

Je place sous cette dénomination générique deux formes d'empreintes de feuilles, provenant des depôts Artiens de l'Oural, avec un contour cunéiforme général du limbe, démembré par une dichotomie successive irrégulière en lanières des différentes ordres. Ces divisions du limbe sont couvertes de stries longitudinales parmi lesquelles se dégage dans chaque lanière une nervure médiane. Une particularité caractéristique du genre est une succession irrégulière de dichotomie, où la lame basilaire du limbe foliaire se divise presque simultanément en trois lamelles ou lanières, dont l'extrême se sépare comme un rameau latéral de la branche normale de la dichotomie. Une ressemblance du contour général des feuilles et du contour de leurs démembrements entre les *Mauerites* et quelques uns des *Dicranophyllum* admet, à ce qu'il parait, la possibilité de l'adjonction des *Mauerites* à la famille des *Dicranophyllées*. Quelques espèces de *Dicranophyllum* leur sont très proches par le caractère de leur feuillage. On remarque une ressemblance spéciale du feuillage des *Mauerites* avec le feuillage que j'ai décrit comme *Dicranophyllum Tchernovi*, chez lequel on observe aussi parfois une succession irrégulière de dichotomie, qui s'exprime en un démembrement de la partie basilaire du limbe en trois lanières à la fois. Ce fait démontre qu'il aurait été, peut-être, préférable d'adjoindre le *Dicranophyllum Tchernovi* au genre *Mauerites* plutôt qu'à celui de *Dicranophyllum*. Des matériaux supplémentaires concernant ces deux genres doivent donner une délimitation exacte de ces deux genres rapprochés, qui sont apparément liés par des transitions graduelles, dont les membres extrêmes diffèrent d'une manière tranchante. Le genre est institué en l'honneur de H. T. Mauer.



Fig. 4. *Mauerites artinensis* Zalessky. Rivière Barda de la localité Krouataïa Katouchka. Artinskien. 1 : 1.

Mauerites artinensis Zalessky n. g. et sp. (Fig. 4)

Un fragment de feuille, long de 6 cm, disséqué par une dichotomie successive en une série de lanières, d'une largueur jusqu'à 3 mm. On voit parfois une succession irrégulière de dichotomie et aussi on voit s'éloigner de la partie basilaire du limbe de la feuille trois lanières à la fois, dont

l'extrème se développe à côté du rameau de dichotomie. Le milieu de chaque lanière est traversé par une nervure, qui se bifurque bien avant le commencement de la dichotomie de la lanière même. Un pli, imitant la nervure, descend de chaque sinus de dichotomie de la lanière jusqu'au point de dichotomie de la nervure. La surface du limbe foliaire, entre les nervures, est couverte de traits en rides fines.

Provenance et horizon. L'unique échantillon de l'espèce représenté sur la fig. 4 provient de la rivière Barda, de la localité Kroutaïa Katouchka, Artinskien (collection H. T. Mauer).

Mauerites gracilis Zalessky n. g. et n. sp., planche I

Des grosses feuilles dissequées, d'un contour généralement cunéiforme, longues de 26 cm et larges (dans leur partie apicale élargie) de 25 cm sont divisées successivement par une dichotomie pas toujours régulière en une série de lanières, dont la largueur dépend de leur emplacement et comprend de 6 mm dans la partie basilaire de la feuille jusqu'à 1.25 mm dans sa partie apicale. Une nervure médiane ressort dans chaque lanière dichotomisant bien avant l'origine de la dichotomie de la portion basilaire du limbe même; elle est fortement masquée par la rugosité ou par les tries du limbe.

On ne connait qu'un seul échantillon de cette espèce, représentant l'empreinte de deux feuilles qui étaient, à ce qu'il parait, situées dans la partie inférieure de l'échantillon sur un jet large de 15 mm dont la sculpture de surface s'est malheureusement mal conservée et est recouverte par-ci, par-là de charbon (planche I). La feuille gauche seule, de grosse dimension a servie à la description de la feuille, donnée plus haut. L'autre est petite, longue de 10 cm tout au plus, et large de 7 cm dans sa partie apicale. La grosse feuille n'est pas symétrique: le rameau droit de la première dichotomie est plus fortement développé que le rameau gauche, qui en face du rameau droit de dichotomie, porte une petite branche d'un caractère latéral.

Provenance et horizon. L'échantillon provient de la rivière Barda, de la localité Krasnaïa Glinka. Artinskien (collection H. T. Mauer).

М. Д. ЗАЛЕССКИЙ. НАБЛЮДЕНИЯ НАД НОВЫМИ РАСТЕНИЯМИ ИЗ НИЖНЕПЕРМСКИХ ОТЛОЖЕНИЙ УРАЛА. I.

РЕЗЮМЕ

Недавно автором получена для изучения из так называемых артинских отложений р. Сылвы и Барды от Г. Т. Мауера, собранная им там интересная коллекция растительных остатков. Эта коллекция проливает новый свет на состав нашей нижне-пермской флоры, обнаруживая в последней присутствие уже значительного количества хвойных из группы Араукариевых и несколько совершенно новых оригинальных представителей класса Салисбуриевых или Гинковых. Араукариевые в нижней перми Урала до сих пор с уверенностью не были известны. Что же касается растительных форм из *Ginkyoales*, то этот класс растений вообще в пермских осадках был представлен (если исключить из рассмотрения *Ginkgoites* и свойственный только этим осадкам род *Ginkgophyllum*), только формами, по облику своему напоминающими формы верхнего карбона. Недавно в статье «О двух новых *Dicranophyllum* из артинских отложений Приуралья» автором показано, что этот род из Салисбуриевых был представлен двумя оригинальными формами с сильно расчлененными широко-клиновидными листьями, т. е. с листьями облика, в верхнем карбоне не обнаруженного. Коллекция Г. М. Мауэра доставляет еще новые примеры таких же оригинальных *Dicranophylleae* в дополнение к уже обнаруженным, но с листьями еще бо́льших размеров и еще более широко клиновидного очертания. Таких форм найдено еще три. Сказанное заставляет предполагать, что эта древняя группа Салисбуриевых была особенно хорошо представлена в нижне-пермское время. Это предположение станет весьма вероятным, если напомнить, что эта же группа растений, по крайней мере двумя-тремя видами, была обнаружена автором и в других местах развития, по его мнению, нижне-пермских осадков, а именно в Кузнецком бассейне. Эти новые Кузнецкие виды *Dicranophyllum*, однако, совершенно отличны от найденных на Урале. Кроме этих интересных форм коллекция Г. Т. Мауэра заключает еще новый папоротник *Bardia*, близкий, вероятно, к роду *Psygmophyllum*, понимаемому автором в объеме Saporta и представленному поэтому, как известно, пока только на Урале и в некоторых местах северной Азии. В настоящей работе автором дается описание только указанных выше новых представителей *Dicranophylleae*, между которыми им устанавливается новый род *Mauerites* с двумя или тремя видами и описание нового вида нового рода *Bardia*, всем своим обликом говорящего за правильность отнесения этого рода к папоротникам. Новый род *Mauerites*, и новый вид нового рода *Bardia* устанавливается в честь известного любителя и собирателя ископаемых органических остатков Приуралья Г. Т. Мауэра. Образцы коллекции Мауэра принадлежат Пермской геолого-разведочной базе, которая взяла на себя расходы по изготовлению поясняющих эту статью рисунков, сделанных Ю. М. Залесским с образцов со всею точностью, какая только возможна.

3 мая 1932 г.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1933.
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ГЕТЕРОХРОМИЯ У БЕССТЕБЕЛЬНЫХ ПЕРВОЦВЕТОВ *PRIMULA ACAULIS* (L.) HILL.

А. С. ЛОЗИНА-ЛОЗИНСКОЙ

(*Представлено академиком* В. Л. Комаровым)

В опытной оранжерее Ботанического института — лаборатории академика Комарова, в числе многих растений Кавказа и Крыма, в течение последних 6 лет культивируется *Primula acaulis* (L.) Hill.

Впервые это растение было привезено из Штирии (Татры) ботаником Лилиенштерн (1923); потом В. Л. Комаров привез из окрестностей Геленджика (1925—1927) около 15 растений; в 1928 г. автором настоящей заметки был собран материал в окрестностях Хосты (Черноморское побережье); в 1929 г. Малеев прислал из окрестностей Никитского ботанического сада несколько образцов; и, наконец, в 1930 г. экспедицией Отдела живых растений — Поярковой было привезено несколько экземпляров из Красной Поляны. Всего культивировалось около 50 растений.

Весь этот материал оказался весьма разнообразным; экземпляр из Штирии и часть материала из Геленджика имеют желтые цветы; другие растения из Геленджика — белые; Хоста дала разных оттенков фиолетовые и розовые цветы, Красная Поляна — белые, желтые, розовые и фиолетовые, а Крым, кроме вышеприведенных, еще новые по окраске фиолетовые венчики.

Признак окраски венчика, бросающийся резко в глаза, связан с целым рядом мелких признаков и часто с общим габитусом растения, почему напрашивалось положение о неравноценности этих форм в систематическом отношении. Это и заставило автора отнестись внимательно к культуре этих растений.

Культивируемая в горшках или ящиках в условиях оранжерейной культуры *Primula acaulis* начинает цвести с января месяца при

t° в 2—4° Ц и достигает полного расцвета в марте; кончается цветение в средине апреля. Растения, культивируемые в течение трех лет, дают букет цветов в 50 штук на одном растении — букет совершенно шарообразной формы с едва заметной зеленью листьев; разнообразные оттенки окраски венчика придают группе таких растений очень нарядный и эффектный вид.

До сих пор в Ботаническом Саду *Primula acaulis* как дикий вид, вывезенный из природы, не культивировался; мы имели лишь неопределимые растения, видимо гибридного происхождения, очень разнообразных названий, относящиеся безусловно к этой группе *acaulis* и получаемые семенами из различных Ботанических садов Европы; по сравнению с нашими дикими формами, эти садовые формы сильно проигрывают. Действительно, бордюр в выставочных оранжереях из таких белых, розовых, фиолетовых или светложелтых пятен был бы очень эффектен, и в зимние месяцы сильно украсил бы наши, еще мрачные, оранжереи многолетников. Зиму они прекрасно выдерживают в грунту, почему можно рекомендовать вводить в культуру это растение в наших садах и парках. Подобранные группами, по оттенкам окраски венчика, *Primula acaulis* дадут заметное весеннее украшение газонов парков и садов; довольно большая продолжительность цветения и крайне простая культура делают это растение очень удобным для культуры.

Гетеростилия цветов очень облегчает работу со скрещиванием различных форм; единственным недостатком этого растения является очень медленная и неровная всхожесть семян (до 1 года) и цветение на 2-й и 3-й год, что сильно замедляет работу со скрещиванием; семена также созревают лишь чрез 2—3 месяца после цветения.

Оранжерейная культура этой группы *Primula* очень проста. Из садовых почв наиболее подходит к почвам, на которых они растут на Кавказе, по плотности и отсутствию закисающих объектов, тяжелая дерновая, к которой полезно прибавление известковых камушков.

Пересадку рекомендуется производить после плодоношения; после чего наблюдается усиленный рост листьев, остающихся потом на зиму, которые в течение всего лета делают запасы и усиливают растение для весеннего цветения, начинающегося до появления новых весенних листьев; таким образом надо отметить две генерации листьев для этой группы *Primula*.

Сильного освещения летом не требует, но во время цветения растения должны получать maximum света; в темноте легко вытягиваясь, они делаются безобразными. Во время цветения температура нужна около 10—12°.

История описания этой группы *Primula* следующая: название *Primula acaulis* (L.) Hill., как самостоятельного вида, существует с 1765 г. (Veg. Syst. VIII, 25); Sibthorp et Smith в Prodromus Florae Graeca (1813) приводят var. *constantinopolitana*, но не для *Primula acaulis*, а для *Primula veris* с фиолетовыми цветами, которая растет «in agro Byzantino»; Sibthorp в Fl. Graeca, 1813, II, t. 184 приводит *Pr. acaulis* var. *rubra* Sibth.; Hoffmanzegg в Verzeichniss (1824) называет ее *Primula Sibthorpii*, отмечает отличие от *acaulis* в окраске венчика; то же повторяет Reichenbach (1832, Flora Excursoria); он дает описание и указывает, что *Primula Sibthorpii* культивируется в садах Европы. Дальнейшие авторы называют эту форму по разному — var. *rosea* Boissier (Fl. or., IV), var. *iberica* Hoffmann, или же var. *Sibthorpii* по Reichenbach'у; приоритет Hoffmanzegg'а почему-то почти не упоминается. Willkomm в Flora Hispanica (1889) приводит еще одну форму var. *balearica*, с белыми цветами, свойственную Балеарским островам.

Рах в своей монографии дает три вариетета *Primula acaulis* — *Sibthorpii* Reich., *balearica* Willkomm, *genuina* Рах и сводит синонимику. Н. И. Кузнецов в Flora Caucasica critica (1901) повторяет то же самое: v. *genuina*, v. *Sibthorpii* и прибавляет еще v. *caulescens*, причем белую форму он относит к v. *Sibthorpii*.

Таким образом, сведя данные литературы, получаем следующую картину: *Primula acaulis* (L.) Hill. состоит из нескольких единиц: 1) цветы желтые var. *genuina* — распространена широко по всей Западной Европе, южному и югозападному СССР, Крыму, Северному Кавказу; по Кузнецову в Закавказьи отсутствует, заменяясь формой с розовыми цветами; 2) цветы розовые — var. *Sibthorpii* распространена в Греции, Северной Персии, Закавказьи, Крыму и 3) цветы белые — var. *balearica* по Willkomm'у, распространена на Балеарских островах.

Наблюдения живого кавказского и крымского материала в опытной оранжерее показали мне некоторые несоответствия с литературными данными, почему я и предприняла более подробное изучение гербарного материала по данной группе.

Опытные растения, проверенные в течение нескольких лет в отношении их константности, были скрещены между собой, и полученное из семян первое поколение доведено до цветения.

Сопоставление наблюдений над живыми как исходными, так и семенными растениями, с изучением гербарных образцов, привело меня к следующему положению: *Primula acaulis* (L.) Hill. есть цикл форм, расселенных

по всему Средиземноморью, Средней Европе, Крыму, Кавказу, южным районам СССР, Северной Персии и Малой Азии, претерпевающий процессы диференциации и дающий ряд мелких определенностей, различающихся морфологически и имеющих некоторое географическое обособление; эти мелкие единицы в массе своей не разделены достаточно четко, а связаны бесконечными переходами, являющимися результатом скрещивания между ними; в отдельных популяциях такие переходные менделирующие формы дают очень богатое разнообразие раскраски и формы венчика и при изучении одного гербарного материала сильно затемняют общую картину. Такой разнообразный ковер форм мы наблюдаем, например, в Крыму, в окрестностях Никитского сада, в Красной Поляне — на альпийских лужайках; Ю. Н. Воронов наблюдал около Батума в горах три зоны *Primula acaulis* — наверху белые и желтые, внизу — розовые, фиолетовые и в середине — смешанных красок. Такое зональное распределение окраски фиолетовой и желтой следует отметить.

В пределах данного цикла варьируют следующие признаки: 1) окраска венчика — белый, желтый, красно-лиловый, фиолетовый, несколько оттенков переходов к розовому, чисто-розовый, грязно-розовый; 2) форма и рисунок пятна на лепестках — округлое или острое, сплошное одного оттенка, желтое или оранжевое, состоящее из одной полоски или трех черточек оранжевых на светложелтом фоне, с белой каймой вокруг желтого пятна или без нее; 3) размер и форма отгиба (лепестка) — широко сердцевидный, узко сердцевидный, с острым вырезом, с тупым вырезом, с налегающими друг на друга краями, отстающими друг от друга, с ровным краем и тонким отгибом, с краем волнистым, загибающимся и отгибом слегка вогнутым; 4) опушение чашечки и цветоножек — слабое, редкое или густое; 5) форма чашечки, — очень сжатая, узкая, с резко сложенными ребрами, более широкая, с сглаженными ребрами, с зубцами глубоко надрезанными или мало надрезанными, достигающими до отгиба или значительно короче трубки венчика, с отогнутыми зубцами после опыления или прижатыми к трубке, с закругленными в бутоне зубцами или нет; 6) антоциан на чашечке — полное отсутствие антоциана, сильно окрашенная чашечка с темнокрасными зубцами и основанием, и все переходы между ними; 7) край листа — мало надрезанный, с еле заметными шипиками; край с довольно сильными надрезами особенно в нижней части, и сильно выделяющимися шипиками; 8) опушение листа — мелкие волоски с нижней поверхности или густое опушение из длинных волосков, создающих видимый глазу налет, похожий на вой-

лок; с верхней стороны полное отсутствие опушения или мелкие прижатые волоски.

Легко себе представить, что при различных сочетаниях этих признаков можно получить огромное количество форм и комбинаций. Возможны ли все эти комбинации в природе — решить нельзя, но что их много, что они очень разнообразны, показывает и простой просмотр исключительно скудного гербарного материала и наблюдения над культивируемыми растениями, почему и понятно, что какие-либо заключения о таксономических соотношениях в данной систематической группе очень затруднительны.

Изучение расщеплений, полученных в результате скрещиваний исходных природных растений, дало мне возможность придти к нижеприводимым положениям:

1. Прежде всего отмечаю полную способность к гибридизации между собой среди всех наблюденных кавказских форм.

2. Далее прихожу к выводу, что формы, с первого взгляда кажущиеся столь отличающимися от соседних, что казалось необходимым их выделить как самостоятельные единицы, являются расщепляющимися сложными гибридами, которые в сочетании с другими формами дают новые, еще более резко отличающиеся формы.

3. Все оттенки грязно-розовых, желто-розовых форм и форм с широкими пятнами с большой белой каймой — есть различные комбинации желтых и антоциановых форм.

4. Чистых линий в природе в данной группе растений почти нет, так как растения обладают полной самостерильностью вследствие гетеростилии.

5. Наблюдаемые в природных условиях отдельные популяции — есть смесь менделирующих гетерозиготных гибридогенных рас (Крым, Красная Поляна); местами же мы наблюдаем более чистые, более однородные поселения, — тогда и генетически они должны быть более однородны (Хоста, Геленджик).

Подобные положения невольно приводят к необходимости дальнейшего изучения расщепления и сочетаний различных признаков; ведь если в условиях опыта удалось получить формы целиком идентичные с формами, привезенными из природных условий, значит подобные скрещивания при перекрестном опылении происходят в природе. Какую же роль в развитии данной группы играют подобные, полученные от случайного опыления, новые комбинации признаков? Являются ли они лишь мимолетными явлениями или они могут закрепиться и дать новую стойкую комбинацию, новообразова-

ние для данной систематической группы? Эти вопросы, имеющие большое значение в систематике в современном ее состоянии и понимании, являются предметом изучения и дальнейшего наблюдения расщепления тех многих полученных в первом поколении комбинаций, семена которых будут высеяны в настоящем году.

Все эти отступления в область генетики в моей данной работе явились вспомогательными моментами для таксономического разделения всей этой группы.

В таксономии часто не приходится руководствоваться генетической структурой растения, почему и в данном случае на многие изменяющиеся признаки приходится закрыть глаза, отмечая их словом «вариирует».

Отмечая основные константные особенности отдельных групп, постараюсь отметить границы между отдельными таксономическими единицами. Географическое расселение сильно облегчает эту задачу.

Прежде всего цикл *Primula acaulis* (L.) Hill. следует разделить на 2 группы: формы с слабо опушенной нижней поверхностью листа и формы с густо опушенной нижней поверхностью листа. В обеих группах наблюдаем расцветки венчика и желтую, и белую, и антоциановую. Северной части ареала свойственна первая группа, южной и восточной — вторая.

К первой группе относится прежде всего наиболее широко распространенная желтая форма, заселяющая всю среднюю Европу, южные районы СССР, Крым, Северный Кавказ, Западное Закавказье и Малую Азию. Форма эта очень константна, на всем протяжении своем не изменяется и лишь в сочетании с другими формами в Крыму и на Кавказе дает помеси. Эту форму будем называть *Primula acaulis* (L.) Hill., так как под этим названием была описана форма из Европы.

Форма с белыми цветами, свойственная Кавказу и Крыму, очень сходная с изображением *Pr. acaulis balearica*, приводимым Wilkomm'ом в Flora Hispanica, 1889, но отличающаяся от гербарных экземпляров, наблюдаемых в гербарии из Палермо, Балеарских островов и Алжира, листовой пластинкой, не суженной в черешок и слабо опушенной: называем *Pr. Komarovi* sp. nova.

Изучение кавказских форм с венчиком, окрашенным антоцианом, показывает, что в этой группе мы имеем несколько единиц.

Название *Primula Sibthorpii*, данное Hoffmanzegg'ом византийской форме с фиолетовыми цветами, может быть перенесено на одну из кавказских форм, совпадающих с описанием Sibthorp'а v. *rubra* — и с приводи-

мым во «Fl. graeca» изображением. В гербарии мы имеем лишь один экземпляр сборов д-ра Wiedemann'а, собранный «in agro Bizantino», который не имеет достаточных отличий от кавказских форм, выделяясь из общей массы несколько более крупными цветами (подобной величины цветы имеют место среди кавказских форм, а также наблюдаются у многих экземпляров, полученных от скрещивания между различными экземплярами *Pr. Sibthorpii*).

Все разнообразие кавказских красных, розовых и фиолетовых форм мы будем называть *Pr. Sibthorpii*, отмечая в некоторых признаках способность варьировать. Кроме *Pr. Sibthorpii* на Кавказе надо отметить еще единицу, которую я выделяю под названием *Pr. Woronovi* sp. nova.

Ко второй группе относится прежде всего *Primula heterochroma Stapf*, известная для Ленкорани и Северной Персии, имеющая белые, розовые и желтые цветы и вероятно состоящая из нескольких самостоятельных единиц. В Западной Европе Lamarck отметил *Primula grandiflora*, эту форму надо восстановить и фиксировать ее для Франции, Испании, Англии; в Италии наблюдается переход к *acaulis* — это растения с более крупными цветами на длинных густоопушенных цветоножках. Из Румелии надо отметить один экземпляр с очень отличными чашечками, листьями, сходный с *Pr. heterochroma*, но, базируясь на всех выводах из наблюдений над расщеплением кавказских форм, приходится воздерживаться от какихлибо выводов. К этой же группе относится *Pr. balearica* Willk.

Употребляя бинарную номенклатуру и указывая на географические определенные расселения, т. е. формально считая данные единицы видами, я все же должна отметить, что виды эти представляют собой более мелкие единицы, чем то, что принято в настоящий момент считать видом. Это очень молодые виды, не диференцировавшиеся еще достаточно; благодаря сходной экологии они габитуально не различимы, т. е. одинаково приспособляясь к окружающим условиям, имеют одинаковые внешние признаки в вегетативных частях.

Привожу далее описание всех вышеотмеченных форм.

Данные составлялись по цветущим экземплярам, описываются листья во время цветения первой генерации; после цветения листья теряют свои отличия и делаются очень сходными.

«*Primula acaulis*» характерна следующими признаками: растения с розеткой продолговатых, обратно яйцевидных листьев, в пазухе которых образуются многочисленные одноцветковые стрелки; цветоножки имеют у основания шиловидные прицветники. Чашечка продолговатая, ребристая,

с пятью глубоко надрезанными острыми зубцами. Венчик с неокрашенной, заключенной в чашечку трубкой и пятираздельным сердцевидно надрезанным отгибом, белой, желтой, красной, фиолетовой или розовой окраски. Коробочка овальная.

1. *Pr. acaulis* (L.) Hill. Veg. Syst. VIII (1765), 25

Растение густо кустящееся с обильными прямостоящими цветами, равными по высоте массе листьев.

Листья темнозеленые, сетчатые, продолговато-овальные, постепенно суживающиеся в черешок, по краю слабо выемчатые с мелкими шипиками по выступам.

Цветоножки прямостоящие во время цветения, отклоняющиеся после цветения, длина от 5—10 см; цветы 3 см в диаметре; венчик светложелтый, отгиб продолговато-сердцевидный, край ровный, желтое пятно на лепестках овальное, с тремя оранжевыми полосками.

Цветоножки и черешки листьев в нижней части с антоцианом, прицветники светлые, очень мелкие.

Чашечка бледная, с прямостоящими зубцами, не доходящими до отгиба венчика, слегка внизу вздутая, до 14 мм дл., 4—5 мм ширины, длина зубцов 6—7 мм.

Опушено все растение многочленистыми и двуклеточными, кончающимися головчатой железкой, волосками. На цветоножках многочленистые волоски достигают до 0.7 мм длины, расположены не густо, на ребре чашечки — 0.6 мм, на зубцах по краю расположены двуклеточные железки, очень мелкие, на трубке венчика — более крупные; листья сверху голые, снизу опушенные по жилкам, волоски немного крупнее волосков цветоножки. Цветы без запаха.

Распространена: Европа — Италия, Германия, Венгрия, Австрия, Трансильвания, Балканы, южные и западные окраины СССР (Белоруссия, Подолия), Крым, Северный Кавказ и Западное Закавказье; Малая Азия.

Specimina examinata: Кубань (Буш), Черкессия (Духовский), Черном. г. Джубга (Лаврова), Абхазия, Бзыбский хр. (Альбов), Красная Поляна (Пояркова — жив. материал), Крым, Никитский сад (Малеев — жив. материал), Яйла (Буш), Симферополь (Дзевановский), Зап. р. СССР — Житомир (Липский, Гагман); Пафлагония (Синтенис), Киликия (Зиэ — Sihe), Кассан-Оглу, Киликия (Коши — Kotchy), Трапезунд (Бурже), Астерабад (Бузе), Амассия — (Манисадиян).

Материал из Каликии, Трапезунда, Амассии — внешне не отличается от типичной желтой формы *acaulis*; экземпляры из Сирии, с о. Крита отличаются опушением и формой листа, напоминающей *P. heterochroma*, но материал этот очень неполный, почему приходится их называть *acaulis* (L.) Hill.

2. *Pr. Komarovi* sp. nov.

Planta acaulis foliis rosulatis, pedunculis unifloris. Folia sordide viridia, ruticulato-nervosa, marginibus erosula et minute apiculata, supra glabra, subtus ad nervos dense pubescentia; bracteae subuliformes, pallidae; pedunculi ad 10 cm longi, sub anthesi erecti, post anthesin patuli, pilis multicellularibus 0.8 mm longis dense pubescentes; flores albi, odorantes, ad 3.7 cm in diametro, lobis latis apice profunde emarginatis 1.7 cm longis, 1.3 cm latis, maculis luteis late ovatis basi insidentibus lineis tribus aurantiacis instructis; Calyx pallide virens, basi subinflatus, 1.5 cm longus, 0.5 cm latus, pilis densis 0.5 mm longis obsitus, costis vix prominentibus, dentibus acuminatis margine glandulosis, lobis corollam attigentibus. Affinis est *Primulae acaulis* (L.) Hill., sed differt floribus majoribus, corolla alba (nec lutea), odore et dentibus calycinis longioribus.

Hab. in Tauria, Caucasia bor. et Transcaucasia occ.

Растение густо кустится от корня, образует много самостоятельных розеток. Цветоножки до 10 см длины, во время цветения прямостоячие, после цветения слегка отклоняющиеся. Цветы до 3.7 см в диаметре, белые, отгиб венчика широко сердцевидный, 1.7 см длины, 1.3 см ширины, с глубокой выемкой, с широкоовальным желтым пятном и тремя оранжевыми жилками на нем. Чашечка светлая, вздутая несколько в нижней части, 1.5 см длины, 0.5 см ширины с сглаженными ребрами и очень острыми зубцами, достигающими отгиба венчика. Листья темнозеленые, сетчатые, с верхней стороны с выпуклостями, по краю выемчатые, с маленькими шипиками у окончания жилки. Прицветники шиловидные бледные.

Опушение: цветоножки опушены довольно густо многоклеточными железистыми волосками 0.8 мм длины, чашечка по ребру покрыта волосками 0.5 мм длины, край зубца — мелкими железками, трубка венчика и край лепестков покрыт железками немного крупнее. Листья сверху голые, снизу по жилкам покрыты такими же как цветоножки волосками.

Цветы имеют очень приятный нежный аромат.

Всего ближе к *Pr. acaulis* (L.) Hill., от которой отличается бо́льшим диаметром цветов, окраской венчика, формой лепестка с характерной выем-

кой, ароматом цветка, зубцами чашечки, достигающими отгиба венчика, размерами волосков.

На основании всех приводимых признаков не может быть отнесена к v. *Sibthorpii*, как делает Н. И. Кузнецов, а должна быть выделена в самостоятельную единицу.

Распространена: Крым, Северный Кавказ, Западное Закавказье.

Specimina examinata: Геленджик (Комаров, 1925—27 — живые в культуре), Крым, Никитский ботанический сад (Малеев, 1930 — живые в культуре), Байдары (Косинский), Массандра (Смирнов), Ялта (Дзевановский).

3. *Pr. Sibthorpii* Hoffmanzegg Verzeichn. (1824), Reichenb. Fl. Excurs., p. 402, 1832

Primula acaulis L. (Hill.) var. *rubra Sibth.* Fl. gr. II (1813), 184.
» » var. *Sibthorpii* Pax in Engler. Pflanzenreich, IV, 22, 1905, p. 237.
Primula acaulis var. *rosea* Boiss. Fl. or. IV, 24.
» » var. *iberica* Hoffmann. Hort. Mosqu., 1808, № 2594 — nom. nudum.
Primula veris β *constantinopolitana* Sibthorp. et Smitt. Fl. Graeca, 1813.
Primula acaulis (L.) Hill. var. *rubra*, Halaczy Consp., Fl. Gr., III. 6, 1904.

Кустится менее густо, чем *Pr. Komarovi* sp. nov., цветы превышают длиной листья, достигают 12—14 см высоты, растопырены во все стороны, отгибаются и наклоняются с самого начала цветения, в диаметре до 2.5 см, венчик фиолетовый, лиловый или лилово-красный, лепестки продолговато-сердцевидные, отгиб 1.5 см длины, 1 см ширины; желтое пятно на отгибе не резко выраженной сердцевидной формы, отороченное белой каемкой, с одной оранжевой полоской. Чашечка очень узкая, с сильно сжатыми ребрами и сжатыми острыми зубцами, сильно растопыренными, недостигающими отгиба венчика; длина чашечки 1.7 см, ширина 0.4 см, длина зубцов — 0.7 см, зубцы у основания чашечки, так же, как шиловидные прилистники, красные от антоциана. Листья темнозеленые, сетчатые, длинно-обратно яйцевидные, сильно суживающиеся к основанию, с выемчатым краем, переходящие в почти бескрылые черешки.

Опушение: на цветоножках волоски не густые 0.8—0.9 см длины, на ребрах чашечки 0.7 мм, на зубцах чашечки мелкие двуклеточные железки, по трубке венчика железки многоклеточные, и более крупные до 0.2 мм длины. Опушение листьев такое же, как у предыдущей. Цветы без запаха.

Характерна своими отклоняющимися цветами, цветом лепестков, плоским, с ровным краем отгибом венчика, узкой чашечкой с растопыренными зубцами.

Распространена: Греция, Северная Персия, Северная Турция, Западное Закавказье, Крым. По Н. И. Кузнецову, корреспондирует с желтой формой на Кавказе, на самом деле ареалы их налегают друг на друга.

В пределах вида сильно вариирует окраска венчика от лилового, почти красного, до бледно-фиолетового и розового, вариирует диаметр цветка и форма долей отгиба венчика, но очень постоянна форма роста — длинные цветоножки, отгибающиеся во время цветения.

Specimina examinata: Хоста (1928—буковый лес жив. культ. материал), Красная Поляна (Пояркова, 1930, жив. культ. материал), Сухум 1912 (Воронов), 1904 (Буш, Воронов, Маркович), Сухум 1888 (Татаринов), Сочи, 1903 (Енько), Юриевское, Чебелда, 1910 (Воронов), Псыртсха (Альбов).

Греция, горы Цирия (выс. 1000—1300 м, 1854 — (Orphanides); „in agro Bizantino" (Dr. Wiedemann), № 441.

4. *Pr. Woronovi* sp nov.

Planta minima, acaulis, pedunculis, unifloris, erectis foliis rosulatis. Folia sub anthesi subduplo pedunculis breviora denticulata ad basin attenuata et hinc magis emarginata, supra minute sparse pilosa, subtus ad nervos praecipue, dense pubescentia. Pedunculi erecti, 5—6 cm longi, dense pilosi, pilis 1.3 mm longis. Flores rosei, (in sicco coerulei vel albi) 2.5—2.7 in diametro, lobis late obcordatis 1 cm latis, 1—1.3 cm longis, maculis luteis parvis rotundatis calyx basi insidentibus obsitis. Calyx 1.5 cm longus, 0.3 latus dentibus acuminatis, 0.6 cm longis, erectis tubo corollae brevioribus. Differt a *Pr. Sibthorpii* Hoffm. folies supra pilosis (nec glabris) et pedunculis brevioribus, 6—7 cm longis (nec 12—14). Hab. in Transcaucasia, Kachetia.

Растение невысокое, с прямостоящими цветами, выделяющимися над массой листьев. Цветоножки 5—6 см длины. Цветы розовые (в гербарии голубые и белые) 2.5—2.7 см в диаметре. Лепестки сердцевидные, 1 см ширины, 1—1.3 см длины, желтое пятно на лепестках очень маленькое, округлое. Чашечка дл. 1.5 см, шириной 0.3 см, зубцы длиной 0.6 см. Чашечка прямая, с прямыми, не отгибающимися зубцами, недостигающими отгиба венчика. Листья во время цветения достигают немного больше поло-

вины высоты цветов, зубчатые, выемчатые, особенно в нижней половине, суживаются в черешок. Прицветники очень мелкие.

Опушение: на цветоножках волоски до 1.3 мм длины, очень густые, на чашечке по ребру также густые волоски 0.75—1 мм длины, по краю зубцов густые двуклеточные мелкие железки, такие же на жилке лепестка и трубке венчика, но очень редкие. Листья с обеих сторон покрыты довольно густо мелкими прижатыми волосками, по жилкам опушение сильнее; зубцы листа кончаются шипиком.

Отличается от *Pr. Sibthorpii* короткими цветоножками, выделяющимися значительно над массой листьев цветами, окраской венчика, опушенным сверху листом. Характерна выемчатостью листьев.

Распространена: в Закавказьи, в Кахетии.

Specimina examinata: Кахетия, Телав 1918 (Воронов); Лагодеха Сигнахский у. 1910 (Млокозевич); Карабах 1828 (Шовиц); Карабах (Гогенакер); р. Арагва 1829 (Шовиц).

Дает помеси с *Pr. Sibthorpii* Hoffm., в гербарии наблюдается много переходных между этими видами форм.

5. *Pr. balearica* (Willk.) comb. nov. = *Pr. acaulis* (L.) Hill. *Pr. balearica* Will. Fl. Hisp. 1889

Растение с прямостоящими и отклоняющимися цветами, цветоножки до 10 см дл.; цв. 3 см в диаметре, отгиб венчика широкосердцевидный, с оттянутой верхней частью, широкий внизу, 1.4 см дл., 1.2 см шир., с сердцевидной выемкой с острым сплошным пятном. Чашечка узкая, с узкими прижатыми зубцами, доходящими до отгиба. Листья продолговато-овальные, книзу оттянутые в довольно длинный черешок, по краю зубчато-выемчатые.

Опушение: цветоножки опушены довольно густо длинными волосками. Чашечка по ребру покрыта такими же волосками, край зубца — мелкими железками. Листья сверху голые, снизу по жилкам и по всей поверхности густо покрытые такими же длинными спутанными волосками, как и чашечка.

Ближе всего стоит к *Pr. heterochroma*. От *Pr. Komarovi* отличается формою и краем листа, опушением чашечки и листа, формою чашечки.

Specimina examinata; Балеарские о-ва: Майорка, Puis de Torella № 43, 8.1873 (Willk.). Палермо, № 653, 1906 (Ross), Балеарские о-ва, 1906 (M. Gandoger).

Из Алжира имеется один экземпляр *Primula* (сборы Boissier и Reuter'a) с цветами белыми или розоватыми — в сухом виде трудно установить. Из за полной неясности приходится предположительно отнести его к *Pr. balearica*.

6. *Pr. grandiflora* Lam. Flore Française 2.248

Растение с розеткой довольно крупных во время цветения листьев и группой до 10 крупных желтых цветов.

Цветоножки до 15 см длины, не превышают листья, цветы диаметром до 3.5 см, лепестки ярко желтые, глубоко сердцевидные, 1.5 см ширины, 1.5 см длины. Чашечка 1.7 см длины, 0.5 см ширины, узкая, слегка кверху расширенная, зубцами почти достигающая отгиба. Листья с ясно выраженным черешком, широко или продолговато овальные, округлые сверху, выемчатые по краям.

Опушение: цветоножки опушены очень густо желтовато-бурыми волосками до 1 мм длины, чашечка по ребру почти войлочная от длинных до 0.8 мм волосков, и трубка венчика мелко волосистая. Лист с верхней стороны голый, опушена только средняя жилка; с нижней стороны лист опушен по всей поверхности, сильнее по жилкам.

От *Pr. acaulis* отличается: длиною цветоножек до 20 см и более,— опушением цветоножек, густым и длинным, формой крупного листа с округлой верхушкой, опушением листа с обратной стороны по всей поверхности, крупными, ярко желтыми цветами.

Ламарк выделяет *Pr. grandiflora* из *Pr. officinalis*, куда Линней причисляет ее как вариетет. Ламарк отмечает величину цветов, диаметром превышающих длину чашечки, их форму, длину цветоножек, не превышающих листьев, цвет венчика—«sulfureux», но замечает, что культура может изменить этот цвет в яркокрасный.

Распространена: Франция, Испания, Англия.

Specimina examinata: Prov. Can-Maxas (Herb. Costae); Serra de Cintra, Lusitania, 1840 (Welwitsch); Франция: Cherbourg (Le Jolis), Paris (Delaroche); Monfalcone (Brumati); Belrive (Henon); Vire (Lenormand). Англия: Nottinghamshire (H Fischer).

Экземпляры из Англии отличаются несколько меньшим опушением.

7. *Pr. heterochroma* Stapf in Denkschr. Acad. Wien 1, 70, 1885

Цветоножки 8—10 см дл., красные от антоциана, изогнутые в верхней части. Цветы 2.5 см в диам., лепестки отгиба продолговато-яйцевидные с острой выемкой, белые, розовые, фиолетовые или палевые, с желтым округлым пятном с тремя оранжевыми черточками. Чашечка с сильно сжатыми ребрами, прижатыми к трубке венчика, недоходящими до отгиба

зубцами, основание и ребра чашечки с антоцианом. Листья яйцевидные, к основанию оттянутые в довольно длинный черешок, по краю мелко выемчатые, с шипиками.

Опушение цветоножек — довольно редкое, волоски белые; чашечка по ребру покрыта мягкими волосками, лист сверху голый, с обратной стороны покрыт густым полувойлочным опушением из длинных спутанных волосков.

Описано Stapf'ом из Северной Персии, приводятся также для Талыша и Ленкорани Гербарный материал очень небольшой, наблюдаемые живые растения, привезеные из Ленкорани Шипчинским в 1931 г., цвели белыми и бледно-розовыми цветами, вид этот представляет собой очень характерный тип, отличающийся от *Pr. Sibthorpii*: характерны цветоножки с антоцианом, форма и опушение листа.

Очень сходна с *Pr. balearica* Willk., отличается краем листа и темной верхней поверхностью; у *Pr. balearica* лист тонкий и светлый.

Гроссгейм в заметке о двух *Primulaceae* (Изв. Кавк. Муз., XI, 1918, 303) Талышинской флоры различает 2 вариетета: var. *flava Grossh.* и var. *violacea Grossh.*; к этим формам надо прибавить еще белую. Повидимому, *Pr. heterochroma* также неоднородна и состоит из нескольких единиц.

Распространена: Юго-восточное Закавказье — Ленкорань, Северная Персия.

Specimina examinata: Ленкорань (Радде), Талыш (Бузе), Астрабад (Бунге, Бузе, Синтенис), Гилян (Гоненакер), Ленкорань, 1931 (Шипчинский жив. культ. материал).

* * *

В 1829 и 1930 гг. мною были получены семена под названием *Primula acaulis* (L.) Hill. из Афин (Hortus Bot. Peloponensis) и *Pr. acaulis* (L.) Hill. β coerulea из Ботанического сада в Лейдене. Эти две формы представляют собой чрезвычайно интересный как в систематическом, так и в декоративном отношении материал, особенно форма из Греции. Основываясь на том, что она не сходится ни с рисунком Sibthorp'а, ни с описанием его, ни с гербарным экземпляром, имеющимся в гербарии Сада, а также на ее неоднородности в пределах трех горшков, приходится признать ее культурной формой.

Характерна эта форма следующим:

Цветы крупные до 4 см диам., на цветоножках, прямостоящих во время цветения и отгибающихся очень низко после отцветания, достигающих

до 15 см дл., высоко выдающиеся над массой листьев. Лепестки бледно-розовые, длинно-сердцевидные, до 1.75 см дл. и 1 см шир. с очень ярким почти треугольным пятном, отороченным белой каймой.

Чашечка с очень длинными зубцами, наверху слегка закругляющимися, сильно сжатыми ребрами, дл. чашечки 2.5 см, длина зубцов 8—10 см, ширина чашечки 5 см, зубцы длиннее трубки венчика.

Листья с резко выраженными черешками и продолговато-овальной пластинкой, в нижней части глубоко надрезанные — эта выемчатость распространяется и на крылья черешков. Эта особенность листа очень характерна и резко выделяет данную форму в постфлоральном состоянии от остальных форм группы.

Опушение: по цветоножкам 1.4 мм, на ребре чашечки 1.2 мм очень густо; листья с нижней стороны опушены по всей поверхности.

Обладает нежным и сильным ароматом. Отличается величиной цветов и опушения, формой лепестков, черешковым листом и чрезвычайно характерной формой роста — прямостоящими цветами, высоко-выдающимися над листьями, образующими симметричный кустик.

По своим декоративным качествам эта форма является одной из самых красивых *Primula acaulis* и культуру ее необходимо широко пропагандировать.

Интересно отметить, что при скрещивании двух *Primula Sibthorpii* разных окрасок мне удалось получить на 25 раст. 3 экз., чрезвычайно сходных с вышеуказанной формой, это служит хорошим доказательством гибридного происхождения последней.

Форма, полученная под названием β *coerulea*, имеет во всех частях большее количество антоциана, красные основания черешков, лилово-красные цветоножки, желто-зеленые листья. Цветы формой сходны с цветами *Primula Sibthorpii*, окрашены в яркий сине-лиловый и красно-лиловый цвет. Чашечка вздутая, с короткими зубцами, почти голая.

Тот факт, что из 5 цветущих растений 3 дали синие, а 2 — красные цветы — показывает генетически неоднородный материал. Это видимо садовый гибрид, конечно, имеющий в основе *Primula acaulis*. Как декоративное растение красив окраской венчика; поэтому, как дополнение к культивируемым обычно садовым формам под названием *acaulis veris* с красными цветами, может быть рекомендовано для культуры.

Вспоминая данные Lamarck'а, можно предполагать, что эта форма есть культурное производное *Pr. grandiflora*.

A. S. LOSINA-LOSINSKAJA. *PRIMULA ACAULIS* (L.) HILL. SYSTEMATIC AND CULTURE

SUMMARY

Primula acaulis (L.) Hill. represents a cycle of formes undergoing a differentiation process in which the seperate taxonomie units are distinguisched with difficulty.

Being possessed of an exceptional aptitude for hybridisation and complete independence this cycle under natural conditions breaks up into a multitude and not transmitted hereditarily. In large populations pure lines are in nature of rare occurrence, but in fairly homogeneous colonies some constant units have differentiated out. These may be set apart as separate taxonomie units and are called by the author species, since their geographical distribution shows a certain isolation. In the group *acaulis* the author distinguishes two subgroups: one with a slightly pubescent underside of the leaf, and the other with a nearly tomentose one. In each group there are forms with white, yellow and antocyan coloured corolles. In the first group the author distinguished 4 species: *Pr. acaulis* (L.) Hill., *Pr. Komarovi* sp. nov., *Pr. Sibthorpi* Hoffm., *Pr. Woronovi* sp. nov. and 3 species in the second group: *Pr. heterochroma* Stapf, *Pr. grandiflora* Lam., *Pr. balearica* (Willk.) comb. nov.

The above conclusions were arrived at by the author from observations made at Prof. V. L. Komarov's Laboratory on cultivated plants from the Caucasus and the Crimea. With these plants crosses were made in order to elucidate the constancy of their characters.

This group may be of value for ornamental purposes and deserves to be extensively cultivated in the parks and gardens of USSR.

Оглавление — Sommaire

Заглавие, отмеченное звездочкой, является переводом заглавия оригинала
Le titre marqué d'un astérisque est une traduction du titre original

Цена 3 руб. 50 коп.